

2025학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	
------	--	------	--	----	--

[문제 1] 1부터 30까지의 수가 적힌 카드가 한 장씩 들어 있는 주머니에서 카드를 한 장씩 뽑는다. 처음 뽑은 카드의 숫자를 m , 다시 넣지 않고 두 번째로 뽑은 카드의 숫자를 n 이라 하자.

[문제 1-1] 확률변수 $X = \int_1^e \{m - n(\ln x)^2\} dx$ 라 할 때, 기댓값 $E(X)$ 의 값을 구하시오. [10점]

[문제 1-2] 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 x, y, z 에 대하여, 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 확률변수 Y 라 할 때, $E\left(\frac{2Y+1}{3^7}\right)$ 의 값을 구하시오. [20점]

- (I) $xyz = \frac{30!}{mn}$
 (II) $x > y > z$
 (III) x 와 y , y 와 z , z 와 x 는 각각 서로소이다.

[문제 2] 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하며, $f'(x) \neq 0$ 이다. 좌표평면상의 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에 대하여, 점 P 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족하는 점 Q 의 x 좌표와 y 좌표를 각각 X, Y 라 하자. (단, O 는 좌표평면상의 원점이다.)

[문제 2-1] 양의 실수 a, b 에 대하여 $f(x) = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ ($0 < x < a$)라 할 때, XY 의 최댓값을 구하시오. [15점]

[문제 2-2] 함수 $f(x)$ 가 $f(x) > 0$ 이고 다음 조건을 만족시킨다.

- (I) $f(1) = 3$
 (II) 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 P 에 대하여, $XY = c$ (c 는 상수)이다.

이때, 함수 $\{f(x)\}^2 + \frac{1}{f(x)}$ 이 $x = k$ 에서 최솟값을 가질 때, k 의 값을 구하시오. [15점]

[문제 3] 좌표평면 위의 원점 O 와 네 개의 점 P, Q, R, S 가 있다. 점 P 의 좌표는 $P(f(t), g(t))$ 이고, 점 P' 의 좌표는 $P'(f'(t), g'(t))$ 이다. 네 개의 점 P, Q, R, S 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (I) $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} < 0$, $a|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}|$ (단, a 는 1보다 큰 실수이다.)
 (II) $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} > 0$, $|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}|$
 (III) $\overrightarrow{PR} \parallel \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} < 0$, $b|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PS}|$ (단, b 는 실수이다.)

[문제 3-1] $a = 2$, $b = 5$ 이고, $f(t) = t$, $g(t) = 4 - 2t$ 일 때, $\int_0^2 (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PS})^2 dt$ 의 값을 구하시오. [10점]

[문제 3-2] $a = 5$ 이고 $f(t) = 2\cos t$, $g(t) = \sin t$ 일 때, 점 $T(0, 1)$ 에 대하여 $(\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{PR})^2$ 의 최댓값을 구하시오. [15점]

[문제 3-3] $a > 2$ 이고 $f(t)g(t) = 1$, $f(t) > a$, $f'(t) > 0$ 일 때, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} > 0$ 임을 보이시오. [15점]