

2025 수능 대비 소우주 모의고사 : 신성 제0호 해설

제 2 교시

수학 영역

공통

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | ③ | 2 | ③ | 3 | ② | 4 | ⑤ | 5 | ② |
| 6 | ④ | 7 | ⑤ | 8 | ④ | 9 | ③ | 10 | ① |
| 11 | ② | 12 | ④ | 13 | ③ | 14 | ① | 15 | ⑤ |
| 16 | 5 | 17 | 4 | 18 | 16 | 19 | 17 | 20 | 13 |
| 21 | 75 | 22 | 28 | | | | | | |

예상 1등급컷

확률과 통계 : 84, 미적분 : 80, 기하 : 82

<코멘트>

공통의 난이도는 25학년도 6월 평가원 모의고사보다 약간 높았습니다. 전반적으로 익숙한 소재를 사용했지만 약간의 형식적, 내용적 변수가 조금씩 들어가 학생들에게 생소하게 느껴질 수 있었습니다.

10번 : 묵묵히 계산하여 풀어낼 수도 있었지만 등비수열 합 공식의 구성요소와 구조에 대한 관찰을 통해서 해결하면 좋았습니다.

11번 : 필연적으로 극한에 대해 확인할 것들을 잘 따라가면 해결할 수 있었습니다.

12번 : 주어진 방정식을 그래프로 관찰할 때, 어떤 부분을 하나의 함수로 생각하고 그릴지 선택하고, 점대칭의 상황을 발견하여 해결할 수 있었습니다.

13번 : 익숙한 실근 개수 함수가 등장하고, 주어진 방정식의 실근의 개수가 무수히 많지 않도록 하기 위해서는 특수한 경우임을 생각할 수 있었습니다.

14번 : 원주각과 사인법칙을 통해 각 정보를 이동시키는 것이 핵심이었습니다. 원 위에 다른 원의 중심이 있다는 정보를 삼각형의 닮음으로 해석할 수 있었습니다.

15번 : 본 시험지 공통에서 가장 어려운 문제였다고 생각합니다. 함수의 한 부정적분의 그래프를 그리고, 대칭성과 평행이동을 고려한 직선의 기울기 파악과 적절한 계산을 요했습니다.

20번 : 주어진 수열의 추이를 전체적으로 파악한 뒤, 몇 개의 항이 겹치는 상황을 연상해 볼 수 있었습니다.

21번 : 일차원 운동에 관한 개념어 이해와, 점 X가 오직 하나 존재함에서 위치함수의 극솟값이 오직 하나임을 알 수 있었습니다.

22번 : 삼각함수의 그래프를 그리고, 그 최대 최소를 관찰하는 문항이었습니다. 경계가 되는 자연수 n값을 확인하는 것이 포인트였습니다.

1. [정답] ③ 4

[해설]

$$\text{구하는 값은 } \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} = 2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2^2 = 4 \text{이다.}$$

2. [정답] ③ 3

[해설]

함수 $f(x) = x^4 - x$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 4x^3 - 1 \text{이므로 구하는 값은 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1) = 3 \text{이다.}$$

3. [정답] ② 6

[해설]

주어진 조건에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k + a) &= 500 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} + 10a \\ &= 440 + 10a \end{aligned}$$

이므로 구하는 값은 $a = 6$ 이다.

4. [정답] ⑤ -2

[해설]

함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (2x - 1)f(x)$$

라 하면 $g(1) = f(1) = 1$ 이다. 함수 $g(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x) + (2x - 1)f'(x) \\ \Rightarrow g'(1) &= 2f(1) + f'(1) \end{aligned}$$

이므로 구하는 값은 $f'(1) = -2$ 이다.

5. [정답] ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$

[해설]

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta = 3, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \text{이고,}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{10}$$

이다. 이때 $\sin\theta < 0$ 이므로, θ 는 제4사분면의 각이고,

$\cos\theta > 0$ 이다. 따라서 구하는 값은 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 이다.

2

6. [정답] ④ 17

[해설]

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x)dx$$

$$\Rightarrow f(2) + 1 = \left[\frac{f(2)}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2$$

$$\Rightarrow f(2) + 1 = \frac{8}{3}f(2) - 4$$

$$\Rightarrow f(2) = 3, f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

이므로 구하는 값은 $f(3) = 3^3 - 3^2 - 1 = 17$ 이다.

7. [정답] ⑤ 3

[해설]

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$

이므로, 구하는 값은 $\sum_{k=1}^{14} S_{k+1} = \sum_{k=1}^{14} \log_2 \frac{n+2}{n+1} = 3$ 이다.

8. [정답] ④ 34

[해설]

주어진 조건에 의하여 $f(1) = 2, f'(1) = 0$ 이다. 따라서

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(1) = 1 + 3 + a + b = 2$$

$$f'(1) = 3 + 6 + a = 0$$

$$\Rightarrow a = -9, b = 7, f'(x) = 3(x-1)(x+3)$$

이므로 구하는 값은 $f(3) = -27 + 27 - 3a + b = 34$ 이다.

9. [정답] ③ 26

[해설]

step I : 주어진 접선의 방정식에서 정보를 뽑아내자.

직선 $y = f'(5)(x-6) + 6$ 는 기울기가 $f'(3)$ 이고 점 $(3, f(3))$ 을 지나는 직선이므로,

$$f'(3) = f'(5), f(3) = f'(3) \times (-3) + 6$$

임을 알 수 있다.

step II : 함수의 식을 세우자.

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고

$f'(3) = f'(5)$ 이므로 그 그래프는 직선 $x = 4$ 에 대하여 대칭이다.

$f'(x) = 3(x-4)^2 + p$ 라 하고, 이를 x 에 대하여 적분하면

$$f(x) = (x-4)^3 + p(x-4) + q$$

이다. 이때, 얻은 조건에 의하여

$$f(0) = 0$$

$$= (-4)^3 + p \times (-4) + q$$

$$\Rightarrow -4p + q = 64$$

이고,

$$f(3) = f'(3) \times (-3) + 6$$

$$\Rightarrow (-1)^3 + p \times (-1) + q = (3+p) \times (-3) + 6$$

$$\Rightarrow 2p + q = -2$$

임을 알 수 있고, 이를 변끼리 빼면

$$6p = -66$$

$$\Rightarrow p = -11, q = 20$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-4)^3 - 11(x-4) + 20$$

을 얻는다. 따라서 구하는 값은

$$f(1) = (-3)^3 - 11 \times (-3) + 20 = 26 \text{이다.}$$

[별해]

삼차함수의 비율관계를 이용하여 해석하자.

변곡점의 x 좌표가 4이므로 삼차함수의 비율관계에 의하여

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선이 이 곡선과

다시 만나는 점의 좌표는 $(6, f(6))$ 이다. 따라서 점 $(6, 6)$ 이 곡선

위의 점이므로, $f(6) = 6$ 이고,

$$f(x) = (x-3)^2(x-6) + k(x-6) + 6$$

으로 놓을 수 있다. $f(0) = 0$ 을 이용하여 k 의 값을 구하고 계산을

마무리하면 된다.

10. [정답] ① -6

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 할 때, 두 수열

$$\{|a_n + a_{n+1}\}, \{|a_n|\}$$

은 공비가 $|r|$ 인 등비수열이고, 두 공비가 같은 두 등비수열의

첫째항부터 제4항까지의 합이 같으므로, 두 등비수열의 첫째항은

같다. 따라서

$$|a_1 + a_2| = |a_1|$$

$$\Rightarrow |a_1| \times |1+r| = |a_1|$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \text{ 또는 } r = -2 \text{ 또는 } r = 0$$

이고, 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 서로 다르므로, $r = -2$ 이다.

따라서 수열 $\{|a_n|\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^4 |a_n| = a_5 - 3 > 0$$

$$= \frac{|a_1|(2^4 - 1)}{2 - 1}$$

$$= |a_5| - |a_1|$$

이다. 따라서 $a_1 = 3$ 이고, 구하는 값은 $a_2 = -6$ 이다.

11. [정답] ② -2

[해설]

step I : 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속임을 이용하자.함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) &= g(1) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-} \left\{ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{f(x)} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \{ \sqrt{f(x)} - x \} = \sqrt{f(1)} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - (x-1)}{(x-1)f(x)} \end{aligned}$$

이다. $x \rightarrow 1-$ 일 때 $(x-1)f(x) \rightarrow 0$ 이고, 주어진 극한이 수렴하므로

$$\begin{aligned} f(x) - (x-1) &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow f(x) &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \frac{f(x)}{x-1} - 1 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

임을 얻는다. 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로, $\sqrt{f(1)} - 1 = -1$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - (x-1)}{(x-1)f(x)} &= -1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{f(x) - (x-1)}{(x-1)^2}}{\frac{(x-1)f(x)}{(x-1)^2}} \end{aligned}$$

이다. 분모와 분자가 각각 수렴하고, 분모가 0으로 수렴하지 않으므로 수렴하는 극한의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{f(x) - (x-1)}{(x-1)^2}}{\frac{(x-1)f(x)}{(x-1)^2}} &= -1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - (x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - (x-1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

임을 얻는다. 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로, 다항식 $f(x)$ 를 내림차순으로 정리하면

$$f(x) = \dots - (x-1)^2 + (x-1)$$

으로 나타내집을 알 수 있다.

step II : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\sqrt{x}} = k$ 의 값을 구하자.

주어진 극한이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\sqrt{x}} &= k \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{f(x)} - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)} + x\sqrt{x}\}} \end{aligned}$$

이므로, 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.따라서 $f(x) = (x-1)^3 - (x-1)^2 + (x-1)$ 이고, 구하는 값은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)} + x\sqrt{x}\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3 - (x-1)^2 + (x-1) - x^3}{\frac{x^2}{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)} + x\sqrt{x}\}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3 - (x-1)^2 + (x-1) - x^3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)} + x\sqrt{x}\}}{x^2} \\ &= \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

이다.

12. [정답] ④ $3^{\frac{3}{4}}$

[해설]

실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = a^x - \frac{5}{3}$$

라 하면 주어진 방정식을

$$(f(x) - x) \times (f(-x) + x) = 0$$

로 나타낼 수 있다. 방정식 $f(x) - x = 0$ 이 $x = k$ 를 실근으로 가지면, 방정식 $f(-x) + x = 0$ 는 $x = -k$ 를 실근으로 가짐을 알 수 있다. 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 고려했을 때 방정식 $f(x) - x = 0$ 는 서로 다른 두 실근을 가지므로, 방정식

$$(f(x) - x) \times (f(-x) + x) = 0$$

이 서로 다른 두 실근을 가지면, 방정식 $f(x) - x = 0$ 의 서로 다른 두 실근의 절댓값이 같다. 양수 m 에 대하여 이 두 실근을 각각 $m, -m$ (은 양수)이라 하면,

$$\begin{aligned} f(m) - m &= 0, f(-m) + m = 0 \\ \Rightarrow a^m - \frac{5}{3} - m &= 0, a^{-m} - \frac{5}{3} + m = 0 \\ \Rightarrow a^m + a^{-m} - \frac{10}{3} &= 0 \\ \Rightarrow 3a^{2m} - 10a^m + 3 &= 0 \\ \Rightarrow a^m &= 3 \\ \Rightarrow 3 - \frac{5}{3} - m &= 0, m = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow a &= 3^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

이므로, 구하는 값은 $3^{\frac{3}{4}}$ 이다.

13. [정답] ③ - 12

[해설]

step I : 방정식 $f(g(t)) = 2$ 이 오직 두 개의 실근을 가질 조건을 생각해보자.

함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 x 에 대한 방정식 $f(x) = tx$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$ 의 값이 될 수 있는 실수는 1, 2, 3이다.

이때, 방정식 $f(g(t)) = 2$ 의 모든 실근이 0, 1이 되기 위해서는 오직 $t = 0, 1$ 일 때에만 세 가지 경우

$$(i) 'g(t) = 1 \text{이고 } f(1) = 2'$$

$$(ii) 'g(t) = 2 \text{이고 } f(2) = 2'$$

$$(iii) 'g(t) = 3 \text{이고 } f(3) = 2'$$

중 하나를 만족시켜야 한다. 그런데,

$$g(t) = 1 \text{ 또는 } g(t) = 3$$

을 만족시키는 실수 t 가 무수히 많으므로, (i), (iii)의 경우에는 $t = 0, 1$ 뿐 아니라 무수히 많은 실수 t 가 주어진 방정식의 실근이 되므로 모순이다. 따라서

$$g(0) = 2, g(1) = 2, f(2) = 2$$

가 되어야 함을 알 수 있다.

step II : 얻은 정보에 의하여 함수 $f(x)$ 의 식을 작성하자.

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 두 직선 $y = 0, y = x$ 에 접한다.

함수 $f(x)$ 의 그래프가 원점에서 두 직선 중 어느 것에 접하는지에 따라 경우를 나누어보자.

원점에서 곡선이 직선 $y = 0$ 에 접하는 경우,

$$f(0) = 0, f(2) = 2, f'(0) = 0, f'(2) = 1$$

이고, $f(0) = 0, f(2) = 2, f'(2) = 1$ 에 의하여

$$f(x) = px(x-2)^2 + x$$

로 놓을 수 있고, $f'(0) = 4p + 1 = 0$ 이므로,

$$f(x) = -\frac{1}{4}x(x-2)^2 + x$$

$$\Rightarrow f(-2) = -\frac{1}{4} \times (-2) \times (-4)^2 - 2 = 6$$

이다. 한편, 원점에서 곡선이 직선 $y = x$ 에 접하는 경우,

$$f(0) = 0, f(2) = 2, f'(0) = 1$$

이고, $f(k) = f'(k) = 0$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재한다. 따라서 $f(0) = 0, f(2) = 2, f'(0) = 1$ 에 의하여

$$f(x) = px^2(x-2) + x$$

로 놓을 수 있고, 방정식

$$px^2(x-2) + x = 0$$

$$\Rightarrow x\{px(x-2) + 1\} = 0$$

이 0이 아닌 중근을 가지므로 $p = 1$ 이고,

$$f(x) = x^2(x-2) + x$$

$$\Rightarrow f(-2) = (-2)^2 \times (-4) - 2 = -18$$

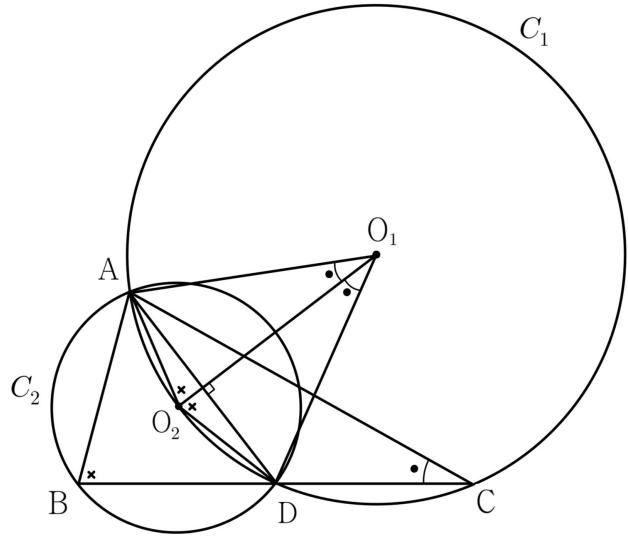
이다. 따라서 구하는 값은 $6 - 18 = -12$ 이다.

14. [정답] ① $\sqrt{10}$

[해설]

step I : 주어진 상황의 의미를 해석해보자.

원주각과 중심각의 관계에 의하여, [그림 1]과 같이 각의 크기를 표시할 수 있다.



[그림 1]

삼각형 ABC , AO_2O_1 는 닮음이고 삼각형 ABC 는 $\overline{AB} = \overline{CB}$ 인 이등변삼각형임을 알 수 있다.

따라서 삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이는

$$\overline{AO_1} = \frac{\overline{AD}}{2\sin B} = \frac{5}{2 \times \frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

임을 얻는다. 한편, 삼각형 ABC 는 $\overline{AB} = \overline{CB}$ 인 이등변삼각형이고

점 D 가 선분 BC 의 중점이므로, $\overline{BD} = x, \overline{AB} = 2x$ 라 놓을 수

있다. 이때 삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$$(2x)^2 + x^2 - 2 \times \frac{7}{8} \times (2x) \times x = 5^2$$

$$= \frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{15}}{3}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{10}$ 이다.

15. [정답] ⑤ $9+2\sqrt{2}$

[해설]

step I : 함수 $F(x) = \int_0^x |f(t)|dt$ 의 그래프를 그려보자.

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$|f(x)| = ||x-a|-2|$$

이므로, 함수 $F(x)$ 를

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt$$

라 하면, 함수 $F(x)$ 의 그래프는 구간 $(0, a-2)$, $(a-2, a)$, $(a, a+2)$, $(a+2, \infty)$ 에서 각각 최고차항의 계수가

$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 인 이차함수의 그래프의 일부이다. 즉,

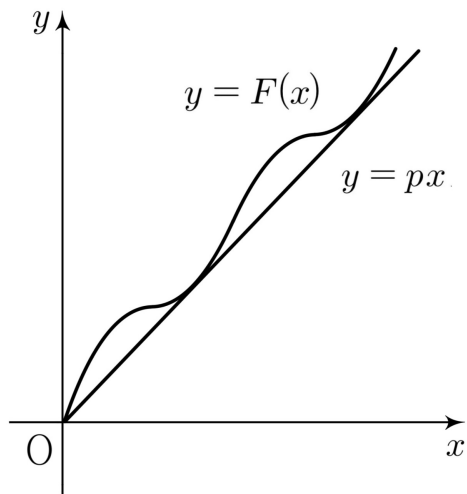
$$(0, a-2) \text{에서 } F(x) = -\frac{1}{2}(x-a+2)^2 + \frac{1}{2}(-a+2)^2,$$

$$(a-2, a) \text{에서 } F(x) = \frac{1}{2}(x-a+2)^2 + \frac{1}{2}(-a+2)^2,$$

$$(a, a+2) \text{에서 } F(x) = -\frac{1}{2}(x-a-2)^2 + \frac{1}{2}(-a+2)^2 + 4$$

$$(a+2, \infty) \text{에서 } F(x) = \frac{1}{2}(x-a-2)^2 + \frac{1}{2}(-a+2)^2 + 4$$

이다. 따라서 함수 $y = F(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

step II : 주어진 부등식의 의미를 해석하자.

부등식 $\int_0^x |f(t)|dt \leq px$ 가 성립하도록 하는 양수 x 의 값이

α_1, α_2 뿐이므로, 곡선 $y = F(x)$ 위의 두 점 $(\alpha_1, F(\alpha_1))$, $(\alpha_2, F(\alpha_2))$ 에서의 접선이 $y = px$ 로 일치한다. 이때, 이 직선의 기울기 p 는 두 점 $(\alpha-2, F(\alpha-2))$, $(\alpha+2, F(\alpha+2))$ 을 지나는 직선의 기울기와 일치하고,

$$F(\alpha+2) - F(\alpha-2) = 4$$

$$\Rightarrow p = 1$$

임을 알 수 있다. 따라서 α_1, α_2 는 일반성을 잃지 않고

$\alpha_1 < \alpha_2$ 라 하면 방정식

$$|f(x)| = 1$$

을 만족시키는 양수 x 의 값 중에서 각각 구간 $(a-2, a)$, $(a+2, \infty)$ 에 포함되는 값이므로

$$|f(x)| = 1$$

$$= ||x-a|-2|$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = a-1, \alpha_2 = a+3$$

임을 얻는다. 즉, $x = a-1$ 은 방정식 $F(x) = x$ 의 한 실근이므로,

$$F(a-1) = a-1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-a+2)^2$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 - 2(a-2) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a-2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = a-1 = 2 + \sqrt{2}, \alpha_2 = a+3 = 6 + \sqrt{2}$$

임을 얻는다. 따라서 구하는 값은 $p + \alpha_1 + \alpha_2 = 9 + 2\sqrt{2}$ 이다.

16. [정답] 5

[해설]

로그의 진수 조건을 먼저 고려하면 $x > -1$ 를 얻는다.

밑을 같게 맞추어 로그방정식을 풀어보자.

$$\log_2(x-1) = \frac{1}{2} + \log_4(x+3)$$

$$\Rightarrow \log_4(x-1)^2 = \log_4(2x+6)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 2x+6$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$= (x+1)(x-5)$$

이고 $x > -1$ 이므로 구하는 값은 5이다.

17. [정답] 4

[해설]

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$$

이다. 따라서

$$\frac{f(a) - f(1)}{a-1} = f'(3)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3 - 6a^2 + 10a - 5}{a-1} = 3 \times 3^2 - 12 \times 3 + 10$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a + 5 = 1$$

$$\Rightarrow a = 4$$

이므로 구하는 값은 4이다.

6

18. [정답] 16

[해설]

주어진 관계식에 $n = 1, 2, \dots$ 을 차례대로 대입하여 나열하면

$$a_1 = 10, a_2 = 6, a_3 = 2, a_4 = -2, a_5 = 1, a_6 = -3,$$

$$a_7 = 0, a_8 = 3, a_9 = -1, a_{10} = 2$$

이므로 구하는 값은

$$\sum_{n=1}^9 a_n = 10 + 6 + 2 + (-2) + 1 + (-3) + 0 + 3 + (-1) = 16 \text{ 이다.}$$

19. [정답] 17

[해설]

주어진 항등식

$$f(x+1) = f(x) + 2x$$

$$\Rightarrow f(x+1) - f(x) = 2x$$

의 양변을 적분하면,

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = x^2 + C$$

를 얻고, $\int_0^1 f(x) dx = 1$ 에 의하여 $C = 1$ 이다.

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} & \int_1^4 f(t) dt \\ &= \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt + \int_3^4 f(t) dt \\ &= (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) \\ &= 2 + 5 + 10 = 17 \end{aligned}$$

이다.

20. [정답] 13

[해설]

step I : 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 이 등차수열이 될 조건을 이용하자.

등차수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 의 공차를 d 라 하면 수열 $\{a_n\}$ 은 모든

자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = d$$

$$= a_{n+2} - a_n$$

를 만족시킨다. 따라서 두 수열 $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}$ 이 각각

공차가 d 인 등차수열임을 알 수 있고, $a_1 = 1$ 이므로

$$a_3 = 1 + d, a_5 = 1 + 2d, a_7 = 1 + 3d$$

이다.

step II : 집합 A 가 주어진 조건을 만족시킴을 이용하자.

두 수열 $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}$ 이 공차가 같은 등차수열임을 고려하면

$n(A) = 5$ 일 때,

$$a_1 = a_4 \text{ 또는 } a_2 = a_3$$

임을 알 수 있다. $a_2 = a_3$ 이면 주어진 조건 $a_2 < a_3$ 에 모순이므로

$a_1 = a_4$ 인 경우만이 가능하고, 집합 A 의 원소를 모두 나열하면

$$a_2 = 1 - d,$$

$$a_1 = a_4 = 1,$$

$$a_3 = a_6 = 1 + d,$$

$$a_5 = a_8 = 1 + 2d,$$

$$a_7 = 1 + 3d$$

이며, 이 수들은 첫째항이 $1 - d$ 이고 공차가 d 인 등차수열을

이룬다. 집합 A 의 모든 원소의 합이 20이므로

$$5(1 + d) = 20$$

$$\Rightarrow d = 3$$

이고, 구하는 값은 $a_9 = 1 + 4d = 13$ 이다.

21. [정답] 75

[해설]

step I : 주어진 상황의 의미를 해석해보자.

점 P의 시각 t 에서의 위치를 $x(t)$ 라 하면, 함수 $x(t)$ 는 함수 $v(t)$ 의 한 부정적분이다. $x(t)$ 는 $v(t)$ 의 부호가 바뀌는 실수

t , 즉 $t=1, t=5, t=\frac{5p}{q}+6$ 에서만 극값을 갖는다.

함수 $x(t)$ 의 두 극솟값이 서로 다른 두 극솟값

$m_1, m_2 (m_1 < m_2)$ 를 갖는다고 하면, $m_1 < k < m_2$ 인 모든 실수 k 에 대하여 방정식 $x(t) = k$ 는 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다. 따라서 점 B의 좌표를 $B(b)$ 라 할 때, $x(t) = k$ 를 만족시키는 양수 t 의 개수가 2인 실수 k 가 0과 b 뿐이면, $x(t)$ 는 $t=1$ 과

$t = \frac{5p}{q} + 6$ 에서 동일한 극솟값 0을, $t=5$ 에서 7 이상인 극댓값

b 를 가져야 한다. 따라서

$$\int_0^1 v(t) dt = -7, \int_1^5 v(t) dt = b, \int_5^{\frac{5p}{q}+6} v(t) dt = -b$$

가 됨을 알 수 있다.

step II : 계산을 통해 답을 구하자.

먼저 $\int_0^1 v(t) dt = -7$ 에서 p 의 값을 구하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(t) dt &= -7 \\ &= \int_0^1 -p(t-1)(t-5) dt \\ &= -p \int_0^1 (t^2 - 6t + 5) dt \\ &= -p \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t \right]_0^1 \\ &= -\frac{7}{3}p \\ &\Rightarrow p = 3 \end{aligned}$$

이다. 한편,

$$\begin{aligned} \int_1^5 -3(t-1)(t-5) dt &= b \\ &= [-(t-1)^2(t-7)]_1^5 = 32 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_5^{\frac{5p}{q}+6} v(t) dt &= -32 \\ &= \int_5^6 v(t) dt + \int_6^{\frac{5p}{q}+6} v(t) dt \\ &= -7 - \frac{1}{2} \times 15 \times \frac{15}{q} \\ &\Rightarrow q = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $10 \times (p+q) = 75$ 이다.

22. [정답] 28

[해설]

step I : 주어진 조건의 의미를 파악하자.

두 실수 x_1, x_2 가 열린구간 $(3, 5)$ 에 존재하면 실수 $x_1 - 1$ 는 열린구간 $(2, 4)$ 에 존재하고 $x_1 + 1$ 은 열린구간 $(4, 6)$ 에 존재한다.

자연수 n 에 대하여 두 집합 A_n, B_n 을

$$A_n = \{f(x) | 2 < x < 4\}, B_n = \{f(x) | 4 < x < 6\}$$

라 하자. 자연수 n 에 대하여

$$f(x_1 + 1) = f(x_2 - 1)$$

을 만족시키는 두 실수 x_1, x_2 가 열린구간 $(3, 5)$ 에 존재할 조건은

$$A_n \cap B_n \neq \emptyset$$

이다.

step II : 충분히 큰 자연수 n 에 대하여 생각해보고, 특수한 경계를 기준으로 경우를 나누어보자.

$n=1$ 일 때에만 두 집합이 함수 $f(x)$ 의 치역

$$\{y | -1 \leq y \leq 1\}$$

과 같으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$n \geq 2$ 일 때에는 두 집합 중 어느 것도

$$\{y | -1 \leq y \leq 1\}$$

이 아니므로, $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ 일 필요충분조건은

$$'f(2) < f(4) \text{ 이고 } f(6) < f(4)'$$

$$\text{또는 } 'f(2) > f(4) \text{ 이고 } f(6) > f(4)'$$

이다. $n=2$ 일 때는

$$f(2) = f(4) = f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않고, $n=3$ 일 때는

$$'f(2) > f(4) \text{ 이고 } f(6) > f(4)'$$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다. $n=4, 5$ 일 때는

$$f(2) > f(4) > f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않고, $n=6$ 일 때는

$$f(2) = f(4) < f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$n=7, 8, 9$ 일 때,

$$'f(2) < f(4) \text{ 이고 } f(6) < f(4)'$$

이므로 주어진 조건을 만족시키고, $n=10$ 일 때는

$$f(2) < f(4) = f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$n > 10$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$f(2) < f(4) < f(6)$$

이므로, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 값은 $1+3+7+8+9=28$ 이다.

제 2 교시

수학 영역 해설 (선택)

확률과 통계

| | | | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|----|---|----|---|
| 23 | ③ | 24 | ② | 25 | ② | 26 | ① | 27 | ② |
| 28 | ② | 29 | 67 | 30 | 42 | | | | |

〈코멘트〉

상당히 까다롭지 않았나 생각합니다. 이러한 난이도로 확률과 통계가 출제되면 낮은 1등급컷이 형성될 수 있을 것 같습니다.

27번 : 주어진 명제의 대우를 생각하여 경우를 나누어 해결하는 문항이었습니다.

28번 : 통계적 추정의 원리를 알고, 표본평균의 평균과 분산의 의미를 해석하는 것이 핵심이었습니다.

29번 : 철저히 종속적으로 구성된 사건들의 연쇄를 확률의 곱셈정리의 활용으로 해결하는 문항이었습니다.

30번 : 경우의 수의 대칭성과 나누어 주는 상황에서 개수가 제한되는 것을 여사건으로 해결해 주는 아이디어가 중요했습니다.

23. [정답] ③ 30

[해설]

구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$ 이다.

24. [정답] ② $\frac{2}{5}$

[해설]

$P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ 이므로 $P(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ 이고,

$$P(B^c) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

이다.

25. [정답] ② $\frac{5}{12}$

[해설]

주사위를 던져 나온 두 눈의 순서쌍에 대하여 나온 두 눈의 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우를 ○, 나온 두 눈의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우를 ×로 나타내면 [표 1]과 같다.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | ○ |
| 2 | × | × | ○ | × | × | ○ |
| 3 | × | ○ | × | ○ | × | ○ |
| 4 | × | × | ○ | × | × | ○ |
| 5 | × | × | × | × | × | ○ |
| 6 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

[표 1]

표본공간의 경우의 수는 36이고 각 근원사건의 확률은 일치하며, 이 중 조건을 만족시키는 경우의 수는 15이다. 따라서 구하는

값은 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ 이다.

2

26. [정답] ① 0.256

[해설]

확률변수 X 가 정규분포 $N(1, t^2)$ 를 따르므로, 정규분포의 표준화에 의하여

$$\begin{aligned} f(t) &= P(t \leq X \leq 2t) \\ &= P\left(\frac{t-1}{t} \leq Z \leq \frac{2t-1}{t}\right) \\ &= P\left(1 - \frac{1}{t} \leq Z \leq 2 - \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

이다. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프의 대칭성에 의하여 함수 $f(t)$ 는

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{t} + 2 - \frac{1}{t} &= 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

일 때 최대이다.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right) = 2 \times P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2}\right)$$

이므로,

$$a = \frac{2}{3}, M = 2 \times 0.192$$

이고, 구하는 값은 $a \times M = 0.256$ 이다.

27. [정답] ② 824

[해설]

주어진 명제

‘ $f(a) \times f(b)$ 가 홀수이면 $a \times b$ 는 홀수이다.’

는 이 명제의 대우인

‘ $a \times b$ 가 홀수가 아니면 $f(a) \times f(b)$ 가 홀수가 아니다.’

와 동치이다. 즉, $a \times b$ 가 짝수인 모든 경우에 $f(a) \times f(b)$ 가 짝수여야 하므로,

- (i) $f(2)$ 와 $f(4)$ 가 모두 짝수인 경우
 - (ii) $f(2)$ 만 홀수이고 $f(1), f(3), f(4), f(5)$ 가 모두 짝수인 경우
 - (iii) $f(4)$ 만 홀수이고 $f(1), f(3), f(2), f(5)$ 가 모두 짝수인 경우
- 에만 주어진 조건을 만족시킨다.

(i)의 경우의 수는 $2^2 \times 5^3$ 이고, (ii)와 (iii)의 경우의 수는 2×3^4 로 같으므로, 구하는 경우의 수는 $2^2 \times 5^3 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^4 = 824$ 이다.

28. [정답] ② $\frac{2}{625}$

[해설]

step I : 확률변수 \bar{X} 를 통하여 X 를 추정해보자.

이 반의 학생 중 임의로 한 학생을 선택해 등급을 확인할 때, 확인한 수를 확률변수 X 라 하면, 이 모집단에서 크기가 5인 표본을 임의추출해서 얻은 표본평균 \bar{X} 에 대하여

$$E(\bar{X}) = E(X), V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{5}$$

이므로, $E(X) = 4, V(X) = 5$ 이다.

step II : 평균과 분산의 정의를 활용하여 계산하자.

따라서 등급이 1, 3, 5, 7인

학생의 수를 각각 a, b, c, d 라 하면, $a+b+c+d=10$ 이고,

$E(X) = 4$ 에 의하여 $a+3b+5c+7d=40$ 이며,

$V(X) = 5$ 에 의하여 $9a+b+c+9d=50$ 이다.

$a+b+c+d=10$ 와 $9a+b+c+9d=50$ 를 변끼리 빼면

$$8a+8d=40$$

$$\Rightarrow a+d=5$$

를 얻고, $4 \times (a+b+c+d) = 40$ 과 $a+3b+5c+7d=40$ 를 변끼리 빼면

$$3a+b-c-3d=0$$

$$\Rightarrow 3(a-d) = c-b$$

를 얻는다. 이때, $t = a-d$ 라 하면

$$a = \frac{5+t}{2}, b = \frac{5-3t}{2}, c = \frac{5+3t}{2}, d = \frac{5-t}{2}$$

이다. a, b, c, d 는 음이 아닌 정수이므로, t 는 1이다.

따라서 $a=3, b=1, c=4, d=2$ 이고, 구하는 값은

$$P\left(\bar{X} = \frac{33}{5}\right) = \frac{5!}{4!} \times \left(\frac{2}{10}\right)^4 \times \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{2}{625}$$

29. [정답] 67

[해설]

step I : 익숙한 상황으로 바꿔보자.

n 번째 시행을 한 직후의 k 의 값을 k_n 이라 하면, 3번째 시행까지 $k_3 \neq 0$ 인 경우만을 표로 나타내면 [표 1]과 같다.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|-------|---|---|---|---|---|
| k_n | 3 | 2 | 1 | 2 | |
| | | | 3 | 2 | 4 |
| | | | | 4 | 2 |
| | | 4 | 3 | 4 | |
| | | | | | |

[표 1]

이때, $k_3 \neq 0$ 이면, $k_4 \neq 0$ 이므로, $k_3 \neq 0$ 일 확률을 구하여 1에서 빼자.

step II : 각 사건이 일어나는 확률을 구하고, 곱셈정리를 쓰자.

$$k_n = 1 \text{ 일 때, } k_{n+1} = 2 \text{ 일 확률은 } \frac{{}_4C_1}{{}_5C_1} = \frac{4}{5} \text{ 이다.}$$

$$k_n = 2 \text{ 일 때, } k_{n+1} = 1 \text{ 일 확률은 } \frac{{}_2C_1}{{}_5C_1} = \frac{2}{5} \text{ 이고,}$$

$$k_{n+1} = 3 \text{ 일 확률은 } \frac{{}_3C_1}{{}_5C_1} = \frac{3}{5} \text{ 이다}$$

$$k_n = 3 \text{ 일 때, } k_{n+1} = 2 \text{ 일 확률은 } \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5} \text{ 이고,}$$

$$k_{n+1} = 4 \text{ 일 확률은 } \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10} \text{ 이다.}$$

$$k_n = 4 \text{ 일 때, } k_{n+1} = 3 \text{ 일 확률은 } \frac{{}_4C_1}{{}_5C_1} = \frac{4}{5} \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{3}{5} \times \left\{ \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10} \right) \right\} - \frac{3}{10} \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10} \right)$$

$$= \frac{67}{250}$$

이고, 구하는 값은 67이다.

30. [정답] 42

[해설]

step I : 익숙한 상황으로 바꿔보자.

상자 A에 들어가는 흰 공의 개수를 a , 상자 B에 들어가는 흰 공의 개수를 b , 상자 A에 들어가는 검은 공의 개수를 c , 상자 B에 들어가는 검은 공의 개수를 d 라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 에 대하여

$$a + b + c + d = 7, a + b \leq 6, a > d, c + d \leq 5$$

를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수와 같음을 알 수 있다.

step II : 공의 개수 제한을 생각하지 않고 전체 경우의 수를 구한 다음, 여사건을 제외하는 방법을 사용하자.

음이 아닌 정수 a, b, c, d 에 대하여

$$a + b + c + d = 7, a > d$$

를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$\frac{{}_4H_7 - ({}_2H_1 + {}_2H_3 + {}_2H_5 + {}_2H_7)}{2} = 50$$

이고,

$$a + b + c + d = 7, a > d, a + b = 7$$

인 경우의 수는 ${}_2H_7 - 1 = 7$ 이며,

$$a + b + c + d = 7, a > d, c + d \geq 6$$

인 경우는 $(1, 0, 6, 0)$ 뿐이므로 구하는 값은 $50 - 7 - 1 = 42$ 이다.

4

미적분

| | | | | | | | | | |
|----|---|----|---|----|-----|----|---|----|---|
| 23 | ④ | 24 | ② | 25 | ④ | 26 | ③ | 27 | ③ |
| 28 | ② | 29 | 4 | 30 | 180 | | | | |

<코멘트>

30번을 제외하고는 무난했습니다.

27번 : '잘게 쪼개어 더한다'는 정적분의 정의를 이해하면 역함수의 정적분 또는 '교대급수와 정적분'으로 해석할 수 있었습니다.

28번 : 적분 기호 안의 식을 f에 대하여 나타내고 치환적분법을 사용하여 해결할 수 있었습니다.

29번 : 평범한 등비급수 계산 문항입니다.

30번 : 접선의 개수와 변곡점에서의 접선의 관계를 재밌는 포장으로 물었습니다.

23. [정답] ④ 2π

[해설]

$u = \sqrt{x}$ 로 치환하면 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$ 이므로, 구하는 값은

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx \\ &= \int_0^{\pi} 2u \sin u du \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left(u - \frac{\pi}{2}\right) \sin u du + 2 \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin u du = 2\pi \end{aligned}$$

이다.

24. [정답] ② 1

[해설]

$g(\pi) = \frac{f(\pi)}{2}$ 이므로 $f(\pi) = 2$ 이고, 함수 $g(x)$ 를 x 에 대하여

미분하면 몫의 미분법에 의하여

$$g'(x) = \frac{f'(x)(2 + \sin x) - f(x)\cos x}{(2 + \sin x)^2}$$

이므로,

$$g'(\pi) = \frac{2f'(\pi) + f(\pi)}{4}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $f'(\pi) = 1$ 이다.

25. [정답] ④ $\frac{8}{3}$

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 극한

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \times a_n}{2^{n+1} + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n \times a_n}{2 + \frac{4}{2^n}}$$

이 수렴하므로, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 $\frac{2}{3}$ 이고, 일반항을

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \times a_n}{2^{n+1} + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} \times a_1}{2 + \frac{4}{2^n}} = \frac{3}{4} a_1$$

이므로, $a_1 = 4$ 이고 구하는 값은 $a_2 = \frac{8}{3}$ 이다.

26. [정답] ③ $\frac{1}{4}$

[해설]

$4 = f(t)$ 를 만족시키는 실수 t 의 값은 2이고,

$f^{-1}(2) = 1$ 이므로, 함수 $g(x)$ 의 그래프 위의 점 (4, 1)에 대응되는 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(2) = \frac{1}{\frac{f'(f^{-1}(2))}{f'(2)}} = \frac{1}{f'(1)f'(2)} = \frac{1}{4}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ 이다.

27. [정답] ③ $\frac{5}{2}\pi - 1$

[해설]

함수 $\sin x$ 가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가하고 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ 에서 감소한다. 따라서 $a_m < a_{m+1}$ 을 만족시키는 가장 큰 자연수를 m 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_m = \frac{\pi}{2}$ 이고,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n a_k |\sin a_{k+1} - \sin a_k| \\ &= \sum_{k=1}^m a_k (\sin a_{k+1} - \sin a_k) - \sum_{k=m+1}^n a_k (\sin a_{k+1} - \sin a_k) \\ &= \sum_{k=1}^m (a_{k+1} \sin a_{k+1} - a_k \sin a_k) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m (a_{k+1} - a_k) \sin a_{k+1} \\ &\quad - \sum_{k=m+1}^n (a_{k+1} \sin a_{k+1} - a_k \sin a_k) \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^n (a_{k+1} - a_k) \sin a_{k+1} \end{aligned}$$

이다. 정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &\quad - \left(\frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \right) \\ &= \frac{5}{2}\pi - 1 \end{aligned}$$

이다.

28. [정답] ② $\frac{3e^4 - e^2}{4}$

[해설]

step I : 먼저 주어진 함수 $f(t)$ 가 결정되는 조건을 해석해보자. 원점과 점 P 사이의 거리가 최소일 때, 원점을 중심으로 하고

점 P를 지나는 원이 곡선 $y = \frac{t}{e^x}$ 에 접하므로, 직선 OP의

기울기와 곡선 $y = \frac{t}{e^x}$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기의

곱이 -1 이다. 함수 $y = \frac{t}{e^x}$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$y' = -\frac{t}{e^x}$$

이므로, $u = f(t)$ 라 하면

$$\frac{te^{-u}}{u} \times (-te^{-u}) = -1$$

$$\Rightarrow t^2 = ue^{2u}$$

를 얻는다.

step II : 치환적분법과 부분적분법을 적용해 계산하자.

$u = f(t)$ 로 치환하면 $\frac{du}{dt} = f'(t)$ 이므로

$$\int_a^b t^2 f'(t) dt = \int_1^2 ue^{2u} du$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} &\int_1^2 ue^{2u} du \\ &= \left[\frac{u}{2} e^{2u} \right]_1^2 - \int_1^2 e^{2u} du \\ &= \left[\frac{u}{2} e^{2u} \right]_1^2 - \left[\frac{1}{4} e^{2u} \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{2u-1}{4} e^{2u} \right]_1^2 = \frac{3e^4 - e^2}{4} \end{aligned}$$

이다

6

29. [정답] 4

[해설]

step I : 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} \{a_1 + f(a_n)\}$ 이 각각 수렴할 조건을 생각해보자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 가 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ 이므로,

수열 $\{a_n\}$ 은 0으로 수렴하고, $f(0) = 0$ 이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \{a_1 + f(a_n)\}$ 가 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_1 + f'(a_n)\} = 0$ 이므로

$f'(0) = -a_1$ 이다.

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 할 때, $-1 < r < 1$ 이다.

step II : 등비급수의 합 공식을 활용하여 계산하자.

주어진 조건에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_1 + f'(a_n)\} &= 6 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \\ &= 2 \times \frac{a_1}{1-r} \\ \Rightarrow \frac{a_1}{1-r} &= 3 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) &= 6 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_1 a_n) \\ &= \frac{a_1^2}{1-r^2} - \frac{a_1^2}{1-r} \\ &= 3(1-r) \left(\frac{1}{1+r} - 1 \right) \\ \Rightarrow 3(1-r)(-r) &= 2(1+r) \\ \Rightarrow 3r^2 - 5r - 2 &= 0 \\ &= (3r+1)(r-2) \\ \Rightarrow r &= -\frac{1}{3}, a_1 = 4 \\ \Rightarrow f(x) &= x^2 - 4x \end{aligned}$$

따라서 $a_2 = -\frac{4}{3}$, $f(3) = -3$ 이므로 구하는 값은 4이다.

30. [정답] 180

[해설]

step I : 점 (t, t) 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은 접선의 접점의 개수가 일정할 조건을 생각해보자.

점 (t, t) 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은 접선의 접점의 개수는 x 에 대한 방정식

$$g(x) = g'(x)(x-t) + t$$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이 식을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = g''(x)(x-t) + g'(x) \left(1 - \frac{dt}{dx} \right) + \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow (g'(x) - 1) \frac{dt}{dx} = g''(x)(x-t)$$

$\frac{dt}{dx} = 0$ 일 때만 방정식 $g(x) = g'(x)(x-t) + t$ 의 서로 다른

실근의 개수가 바뀔 수 있으므로, $x = t$ 또는 $g''(x) = 0$ 일 때,

즉, 점 (t, t) 가 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이거나 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점에서의 접선일 때만 접선의 개수가 바뀔 수 있다.

step II : 주어진대로 대칭성을 활용하여 계산해보자

함수 $g(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{f(x)} - f''(x) \\ \Rightarrow g''(x) &= f''(x)e^{f(x)} + \{f'(x)\}^2 e^{f(x)} \end{aligned}$$

이다. 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 곡선 $y = g(x)$ 가

직선 $y = x$ 와 만나지 않고, 직선 $y = x$ 가 곡선 $y = g(x)$ 의

두 변곡점에서의 접선의 교점을 지나야 한다.

따라서 $f''(x) = -1$ 이고, 곡선 $y = g(x)$ 의 두 변곡점의 x 좌표를

각각 a, b ($a < b$) 라 할 때, $f'(a) = 1$, $f'(b) = -1$ 이다. 따라서

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-3) + C$$

이고, $2 = 2 - a + g(a)$ 이므로, $C = 0$ 이다. 구하는 값은

$80 \times \{f(0)\}^2 = 180$ 이다.

기하

| | | | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|---|----|---|----|---|
| 23 | ⑤ | 24 | ④ | 25 | ② | 26 | ① | 27 | ② |
| 28 | ③ | 29 | 24 | 30 | 9 | | | | |

〈코멘트〉

27부터 30번까지 난이도 차이가 크게 나지 않는 구성이었습니다. 아주 어렵지는 않지만 그래도 절대 쉽지만은 않았습니니다.

27번 : 포물선의 정의를 위한 보조선을 긋고, 두 방향에서 공간도형의 상황을 단면화하여야 풀 수 있었습니다.

28번 : 실수 t 에 대하여 나타낸 직선의 벡터방정식을 확인할 수 있었습니다. 실수배 구성을 통한 한 직선에 존재함을 통해 t 의 범위를 잡아 해결하면 좋습니다.

29번 : 구성이 잘 짜여진 타원의 정의 문제입니다.

30번 : 흔한 상황이지만, 원과 구가 한 점에서만 만나는 기하적 상황이 재미있습니다.

23. [정답] ⑤ $\frac{4}{5}$

[해설]

두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (3, 4)$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{2 \times 3 + 1 \times 4}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{5} \times 5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

이고, 구하는 값은 $\frac{4}{5}$ 이다.

24. [정답] ④ 4

[해설]

구하는 값은 $\sqrt{7+9} = 4$ 이다.

25. [정답] ② 8

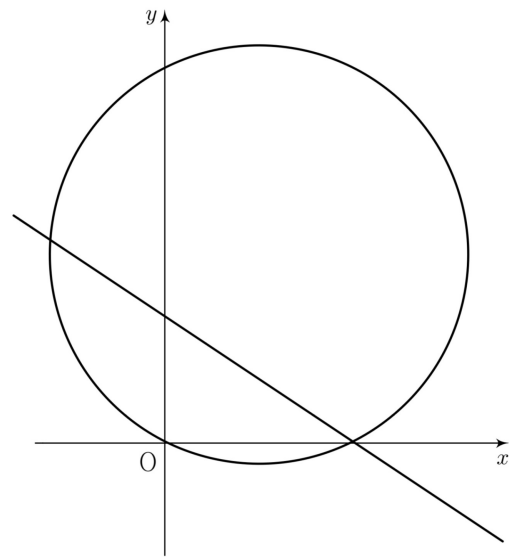
[해설]

주어진 점들의 좌표는 각각 $B(-3, -4, 5)$, $C(3, -4, 5)$ 이므로 구하는 값은 8이다.

26. [정답] ① $\frac{10}{3}\pi + \frac{5}{4}\sqrt{3}$

[해설]

좌표평면에서 $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP} \leq |\overrightarrow{OP}|^2$ 를 만족시키는 점 P 가 나타내는 영역은 원점과 점 $(2, 4)$ 를 이은 선분을 지름으로 하는 원의 둘레 또는 내부이고, $5 \leq \vec{a} \cdot \overrightarrow{OP}$ 를 만족시키는 점 P 가 나타내는 영역은 점 $(\frac{1}{2}, 1)$ 을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선에 의하여 나뉘어진 두 영역 중 점 $(2, 4)$ 가 있는 영역이므로, 이 두 조건을 모두 만족시키는 점 P 가 나타내는 영역은 [그림 1]에서 원과 직선으로 둘러싸인 두 영역 중 더 넓은 영역이다.



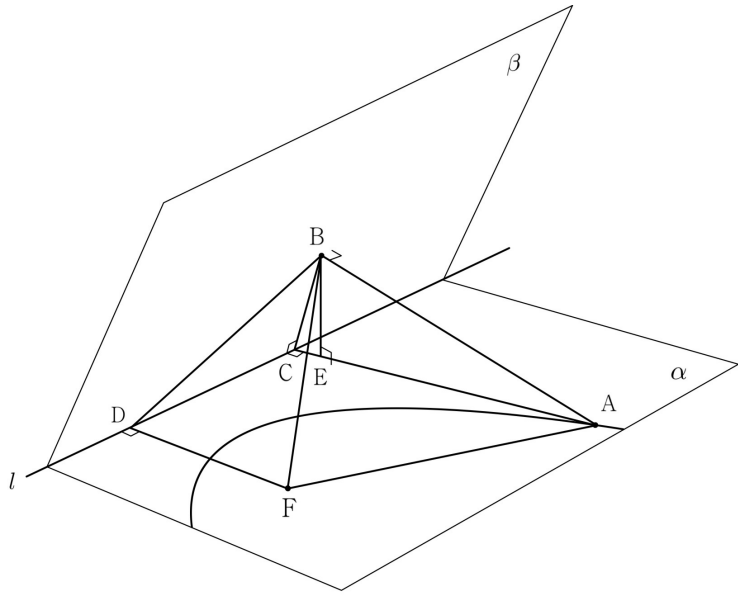
[그림 1]

따라서 그 넓이는 $\frac{10}{3}\pi + \frac{5}{4}\sqrt{3}$ 이다.

27. [정답] ② $3\sqrt{3}$

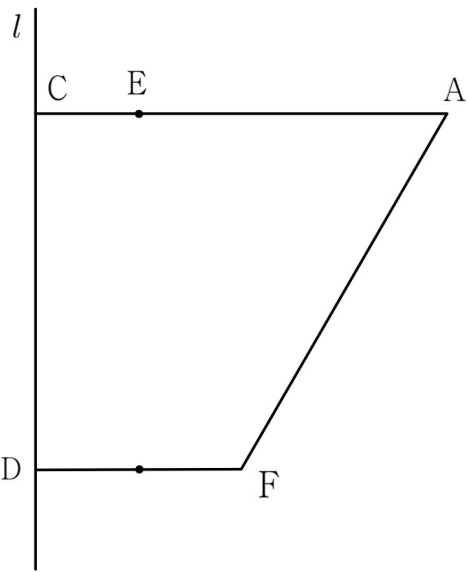
[해설]

점 A와 점 F에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고 점 B에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 E라 하자. 이를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

주어진 상황을 평면 α 에 수직인 방향에서 바라본 것을 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

$\overline{AC} = a$ 라 하면, 포물선의 정의에 의하여

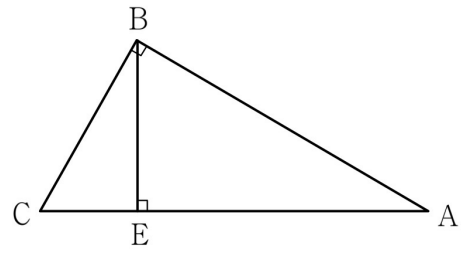
$$\overline{AC} = \overline{AF} = a$$

이고, $\overline{CD} = b$ 라 하면, 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 - (a-2)^2 &= b^2 \\ &= 4a - 4 \end{aligned}$$

를 얻는다.

주어진 상황을 평면 ABC에 수직인 방향에서 바라본 것을 나타내면 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

$\overline{BC} = c$ 라 하면 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이므로

피타고라스 정리에 의하여

$$c^2 + (2\sqrt{3})^2 = a^2$$

를 얻고, $\sin(\angle ACB) = \frac{2\sqrt{3}}{a}$ 이고 $\overline{BF} = 2\sqrt{5}$ 이므로,

피타고라스 정리에 의하여

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{a} \times c\right)^2 + b^2 + 1 = (2\sqrt{5})^2$$

을 얻는다. 이를 연립하면

$$\frac{12c^2}{c^2 + 12} + c^2 + 13 = 20$$

$$\Rightarrow c^4 + 17c^2 - 84 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 = 4$$

를 얻는다. 따라서 $a = 4, b = 2\sqrt{3}, c = 2$ 이므로 구하는 값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

28. [정답] ③ $\frac{4}{3}$

[해설]

step I : 주어진 상황을 관찰할 때, 필요한 점들을 확인하자.

주어진 조건 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}| = 2$ 에서 점 P가 나타내는 도형은

선분 AB의 중점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이다.

$\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는 점 X는 직선 AB 위의

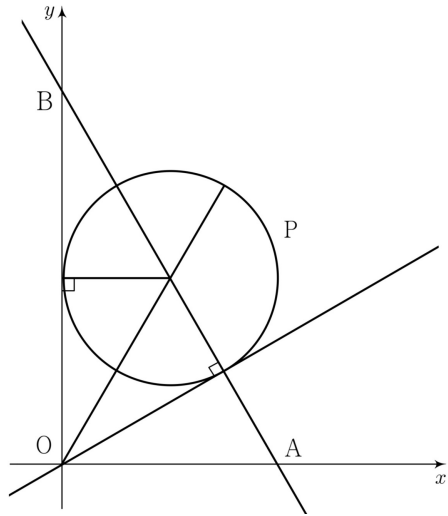
점이고, $s\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX}$ 인 실수 s가 존재한다. $t=0$ 일 때, 점 X의

위치는 점 B이고, $t = \frac{3}{4}$ 일 때, 점 X의 위치는 선분 AB를

1:3으로 내분하는 점이다. 실수 t의 최댓값이 $\frac{3}{4}$ 이고 최솟값이

0이므로 이때, 점 P가 나타내는 원은 직선 OX에 접한다.

이를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

직선 OX가 점 P가 나타내는 원의 중심을 지날 때, s 의 값이 최대 또는 최소이고, 그 값은 각각 $2, \frac{2}{3}$ 이므로 구하는 값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

29. [정답] 24

[해설]

step I : 주어진 기하적 상황을 해석하고, 타원의 정의를 사용하자. 선분 F'B의 중점이 A이고 삼각형 F'BC의 무게중심이 점 F이므로, 점 F는 선분 AC를 1:2로 내분하는 점이다.

따라서 $\overline{AF} = x$ 라 하면

$$\overline{CF} = \overline{CF'} = 2x$$

이고, 타원의 정의에 의하여

$$\overline{CF} + \overline{CF'} = \overline{AF} + \overline{AF'}$$

$$\Rightarrow \overline{AF'} = 3x$$

이다.

step II : 기하적 상황에서 방정식을 세워 미지수를 구하자.

$\overline{AF'} = \overline{AB} = \overline{CF'}$ 이므로, 선분 AF'을 지름으로 하는 원이 점 C를 지난다. 따라서 $\angle BCF' = \frac{\pi}{2}$ 이고, 삼각형 F'BC에서

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BC} = 6\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{(3x)^2 - x^2}$$

$$= 2\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow x = 3$$

이다. 선분 BC가 x 축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 BC의 중점이고, 점 F는 선분 DF'을 1:2로 내분하는 점이다. 삼각형 F'DC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{DF'} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \overline{FF'} = 2\sqrt{3}$$

이다. 타원의 장축의 길이는 6이므로, 구하는 값은

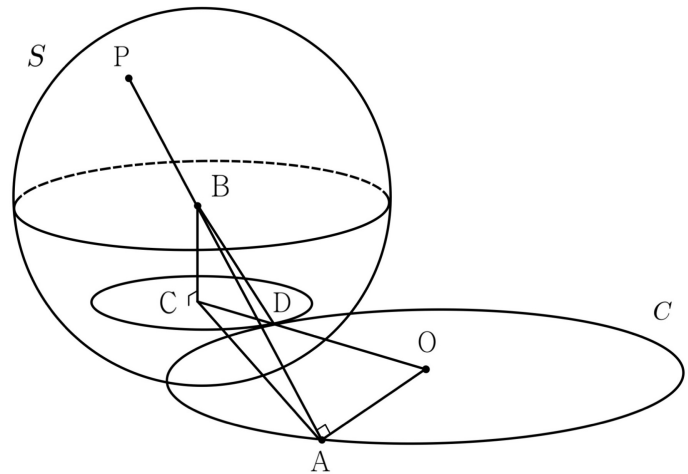
$$k^2 = 6^2 - (2\sqrt{3})^2 = 24 \text{이다.}$$

30. [정답] 9

[해설]

step I : 주어진 상황을 관찰할 때, 필요한 점들을 확인하자.

구 S의 중심을 B라 하자. 구 S 위의 점 P를 점 A와 점 P 사이의 거리가 최대가 되도록 잡을 때, 점 P는 직선 AB가 구 S와 만나는 두 점 중 점 A와의 거리가 더 큰 점이다. 점 B에서 원 C를 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 C라 하고, 구 S와 원 C가 만나는 점을 D라 할 때, 점 C를 중심으로 하고 점 D를 지나며 원 C와 같은 평면에 있는 원은 원 C와 외접한다. 이를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.



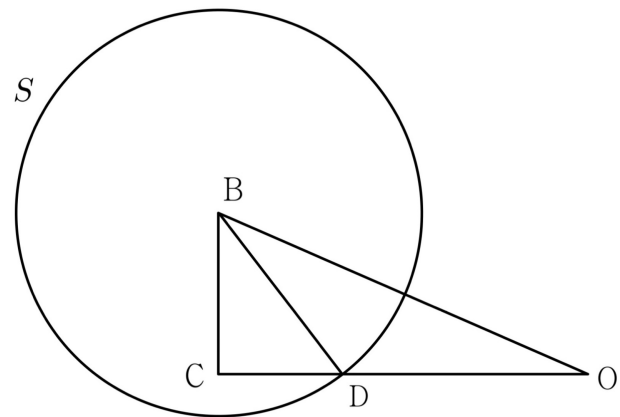
[그림 1]

step II : 점 B와 원 C를 포함하는 평면 사이의 거리를 구하자.

이때 $\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = 8 - 3 = 5$ 이고, 삼각형 ABO에서

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{OB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AB}^2 = 4^2 + 5^2 = 41$ 이다.

주어진 상황을 평면 BCO에 수직인 방향에서 바라본 것을 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

$\overline{BC} = x, \overline{CD} = y$ 라 하면 두 삼각형 CBO와 CBD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2 + y^2 = 3^2, \quad x^2 + (y+4)^2 = 41$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2) + 8y + 16 = 41$$

$$\Rightarrow y = 2, \quad x = \sqrt{5}$$

이다. 각 θ 에 대하여 $\sin^2 \theta = \frac{x^2}{5^2} = \frac{1}{5}$ 이므로

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ 이다. 따라서 구하는 값은 $4 + 5 = 9$ 이다.

