2025 6월 모의고사 10번

난이도 : 하

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$　② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$　③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$

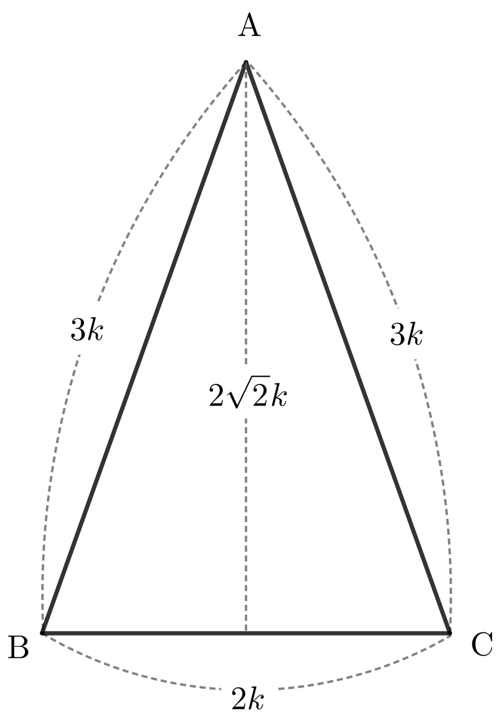
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$　⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

"발문에는 **외접원의 넓이**를, (가)에서는 **두 각의 사인비**를, (나)에서는 **두 각이 같음**을 줬네. **사인 법칙, 코사인 법칙**을 적당히 잘 써서 삼각형의 정보를 알아내면 되겠다."

"$\sin A : \sin B = 2:3$이라고? $\overline{BC} : \overline{AC} = 2:3$이겠군."

또한, $\cos B = \cos C$이므로, $\triangle ABC$는 $\angle B = \angle C$인 이등변삼각형이다.

이를 바탕으로 그림을 그려보면 다음과 같다.



또한 발문에 따르면 외접원의 넓이가 9π이므로, 지름은 6이다.

$$\frac{3k}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{9}{2\sqrt{2}}k=6$$ (사인법칙, 지름이 6임을 이용)

$$\Rightarrow\ k=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

마지막으로 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 k로 표현하고, 대입해서 마무리하자.

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times 2k\times 2\sqrt{2}\,k=2\sqrt{2}\,k^2=\frac{64}{9}\sqrt{2}$$

답: ⑤

1

난이도 : 하

2025 6월 모의고사 11번

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

문제에서 준 조건들을 잘 연립해서 삼차함수를 구하면 끝나는 문제다.

1) $f(0)=0$
2) $f(a)=1$, $f'(a)=3$

이 정보를 토대로 접선을 구해보면 $y=3(x-a)+1$이므로,
접선의 y절편이 4임을 이용해서 식을 또 세우면,

$4=-3a+1 \Rightarrow a=-1$

지금까지의 조건을 바탕으로 $f(x)$의 식을 세우자.

1) $f(-1)=1$, $f'(-1)=3 \Rightarrow f(x)=(x+1)^3+k(x+1)^2+3(x+1)+1$

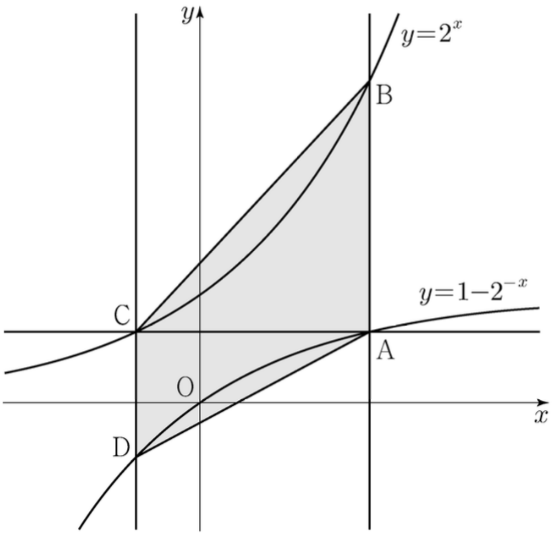
2) $f(0)=0 \Rightarrow f(0)=1+k+3+1=0 \Rightarrow k=-5$

$\therefore f(1)=8+4k+6+1=15+4k=-5$

답: ⑤

2025 6월 모의고사 12번

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

"두 곡선 사이에 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 점대칭이 보이는데? 당장 쓸 방법은 안 보이니 일단 인지만 해 놓자."

"문제에서 함수의 식은 다 줬네. 결국 각 점의 정확한 위치를 계산해야 하네."

점 A의 x좌표를 k라 하자.

$$\overline{AB}=2^k-(1-2^{-k})=2^k+\frac{1}{2^k}-1$$

$$y_C=1-2^{-k}=1-\frac{1}{2^k}$$

$$y_D=1-\frac{1}{1-2^{-k}}=\frac{-2^{-k}}{1-2^{-k}}=-\frac{1}{2^k-1}$$

$\overline{\mathrm{CD}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k-1}=1+\frac{1}{2^k(2^k-1)}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$로 식을 세워주면,

$2^k+\frac{1}{2^k}-1=2\left\{1+\frac{1}{2^k(2^k-1)}\right\}$

보기 힘드니 $2^k=X$로 놓고 계산하자.

$X+\frac{1}{X}-1=2+\frac{2}{X(X-1)}\ \Rightarrow\ X^2(X-1)+X-1-X(X-1)=2X(X-1)+2$ (양변에 $X(X-1)$ 곱하기)

$\Rightarrow\ X^3-4X^2+4X-3\ \Rightarrow\ X=2^k=3,\ k=\log_2 3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2^k+\frac{1}{2^k}-1=\frac{7}{3},\ \overline{\mathrm{CD}}=1+\frac{1}{2^k(2^k-1)}=\frac{7}{6}$

또한 $y_C=2^{x_C}=1-\frac{1}{2^k}=\frac{2}{3}$이므로, $x_C=\log_2\frac{2}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}=2\log_2 3-1$

따라서, 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면,

$S=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+\frac{7}{6}\right)\times(2\log_2 3-1)=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$ 이다.

답: ③

| NOTES

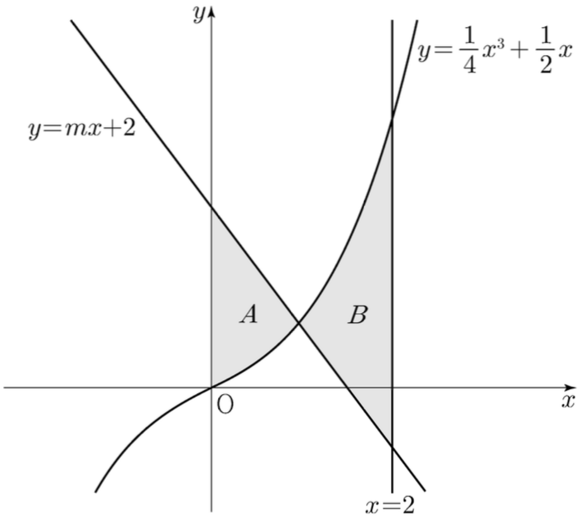
- 지수 / 로그함수 문제에서 **<u>계산을 위주로 변별</u>**하는 문제들은 자주 출제되어 왔다.
  대칭성이나 기하적인 성질을 이용해서 푸는 것이 멋있고 효율적이긴 하지만, 안 통할 수도 있기에 언제든지 계산을 할 '각오'를 하는 게 좋다.

2025 6월 모의고사 13번

난이도 : 하

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



$B-A$의 의미를 파악하는 게 중요하다.

A, B는 '넓이'이므로 항상 양수이지만,
곡선$\left(y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)$과 직선$(y=mx+2)$의 차이로 이루어진 정적분 값은
A, B에 대응하는 구간에서 **각각 반대의 부호**를 갖고 있으므로,

$B-A$는 결국 0부터 2까지의 정적분값만 풀면 끝난다.

$$B-A=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2=1+1-2m-4=\frac{2}{3} \Rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

답: ③

2025 6월 모의고사 14번

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

$\log_2 \sqrt{-n^2+10n+75} - \log_4 (75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

실수하지 않도록 로그 안 진수조건들을 미리 체크하고 넘어가자.

정리하면

1) $kn < 75$

2) $(n-15)(n+5) < 0 \Rightarrow -5 < n < 15$

식부터 간단하게 하자.

$$\log_2 \sqrt{-n^2+10n+75} - \log_4 (75-kn) = \log_4 \frac{-n^2+10n+75}{75-kn} > 0$$

로그 안의 식이 1보다 커지게 하면 되겠다.

$-n^2+10n+75 > 75-kn \Rightarrow n^2-(10+k)n < 0$

$\Rightarrow n(n-10-k) < 0$

$\Rightarrow 0 < n < 10+k$

그렇다면, 다음 조건을 모두 만족시키는 n의 개수가 12가 되도록 하는 k를 찾으면 된다.

1) $kn < 75 \Rightarrow n < \frac{75}{k}$

2) $(n-15)(n+5) < 0 \Rightarrow -5 < n < 15$

3) $0 < n < 10+k$

종합해보면,

$n < \min\left(\frac{75}{k},\ 15,\ 10+k\right)$이다. (단, $\min()$은 주어진 숫자 중 최솟값을 의미한다.)

n의 개수가 12가 되기 위해서,

$12 < \min\left(\frac{75}{k},\ 15,\ 10+k\right) \leq 13$을 만족해야한다.

즉, $\frac{75}{k}$, $10+k$ 중 더 작은 값이

<u>12보다 크고, 13보다 작거나 같으면</u> 된다.

i) $12 < k+10 \le 13$일 경우, $k=3$이다.

이후 k가 커질수록 $\frac{75}{k}$가 작아지므로, 다음 경우를 살펴보자.

ii) $12 < \frac{75}{k} \le 13$일 경우, $\frac{75}{13} \le k < \frac{75}{12}$이다.

$\frac{75}{13} = 5.\mathrm{xxx}$, $\frac{75}{12} = 6.\mathrm{xxx}$ 꼴이므로, $k=6$이다.

따라서, 모든 자연수 k의 값의 합은 $3+6=9$이다.

답: ④

2025 6월 모의고사 15번

난이도 : 상

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt \geq 0 \text{이고}$$

$$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt \geq 0 \text{이다.}$$

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

$g(x)$를 먼저 살펴보자.

왼쪽 구간$(x \leq k)$은 기울기가 2이고 $(k,\ k)$를 지나는 직선이다.
이후, 삼차함수로 매끄럽게 연결되는 것 같다.

(가)를 통해 식 두 개를 얻어낼 수 있다.
$f(k)=k$
$f'(k)=2$

또, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가한다는 것도 중요하다.
$x=k$ 이후로 $f(x)$에서 **감소구간이 없다**는 뜻이다. 이것도 생각해 놓자. ⋯ ㉠

비주얼만 보면 (나) 조건이 복잡해 보인다. 하지만 자세히 들여다 보면,
"곱해져 있는 게 $|X| \pm X$꼴의 형태이므로, 간단하게 정리할 수 있겠네..!"

(나)의 첫 번째 식부터 해석해 보자.

$0 \le x \le 1$에서 $|t(t-1)|+t(t-1)=0$이므로,
<u>피적분함수</u>(혹은 순간변화율)**<u>의 값이 0</u>**이다.

따라서, $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$의 그래프가 x축 위에 있다는 것을 알 수 있다.

$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$가 양수가 되기 위한 조건을 살펴보자.

1) 먼저, $x=1$보다 **<u>살짝 오른쪽</u>**으로 넘어가는 그 순간에, $g(1+)>0$이 되어야
$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$가 양수로 갈 수 있다.

2) 비슷하게, $x=0$보다 **<u>살짝 왼쪽</u>**으로 넘어가는 그 순간, $g(0-)<0$이 되어야
$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$가 양수로 갈 수 있다.

$g(0)=-k$이므로 $g(0-)<0$은 자명하다.
$g(1+)>0$은 새로운 조건이므로 적어 놓자. $\cdots$ ㉡

(나)의 두 번째 식도 해석해 보자.

이번엔 반대로 $-2<x<1$에서만
$|(t-1)(t+2)|+(t-1)(t+2)>0$이다.

나머지 범위에선 $|(t-1)(t+2)|+(t-1)(t+2)=0$이다.

$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|+(t-1)(t+2)\}$가 양수가 되는 조건을 살피다보면, 한 가지 사실을 알 수 있다.

1) $x=1$보다 **<u>살짝 왼쪽</u>**으로 넘어가는 그 순간에, $g(1-)<0$이어야 한다.
위에서 쓴 ㉡과 함께 고려해보면, $g(1-)<0$, $g(1+)>0$이므로,

$g(1)=0$이다.

2) $x=-2$보다 **<u>살짝 오른쪽</u>**으로 넘어가는 그 순간에, $g(-2+)<0$이어야 한다.
이 또한 $g(0)=-k$임을 고려하면 자명하다.

"이제 (나)를 어느정도 살펴봤으니, 다시 ㉠ ($g(x)$는 감소구간이 없음)을 살펴보자.

$g(x)$는 증가하는 함수이므로, 왼쪽 구간$(x \leq k)$ 중 $\left(\frac{k}{2},\ 0\right)$에서만 x축을 지나야한다.

(나)에서 구했듯 $g(1)=0$이므로, $k=2$이다.

이를 (가)에서 구한 조건 $f(k)=k$, $f'(k)=2$에 대입하면

$f(2)=2$, $f'(2)=2$이다.

따라서, $f(x)$의 식을
$f(x)=(x-2)^3+a(x-2)^2+2(x-2)+2$로 잡을 수 있다.

"$g(k+1)=f(3)=5+a$이므로, 이제 **<u>a의 최솟값</u>**만 구하면 되겠네."

조건이 부족하다고 당황하지 말자.
천천히 살펴보면 오른쪽 구간$(x \geq k)$에서 $f(x)$의 **<u>감소구간이 없어야한다</u>**는 조건을 사용하지 않았으니 마저 사용하자.

$f'(x)=3(x-2)^2+2a(x-2)+2$이므로, 우리가 구하는 조건은
곧 $3x^2+2ax+2$가 양근을 가지지 않아야 한다는 조건과 동치이다.

<u>근과 계수의 관점</u>에서 접근해보면 (두 근을 각각 α, β로 세팅)
$\alpha\beta>0$ (두 근의 부호가 같음)이므로, $\alpha+\beta<0$ (두 근이 전부 음수)이거나 아예 $D \leq 0$이어야 한다. (단, D는 판별식)

1) $\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}<0 \Rightarrow a>0$
2) $D/4=a^2-6 \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6}$

$\therefore$ a의 최솟값은 $-\sqrt{6}$ 이다.

따라서, 이때 $g(k+1)=5+a=5-\sqrt{6}$

답: ②

1

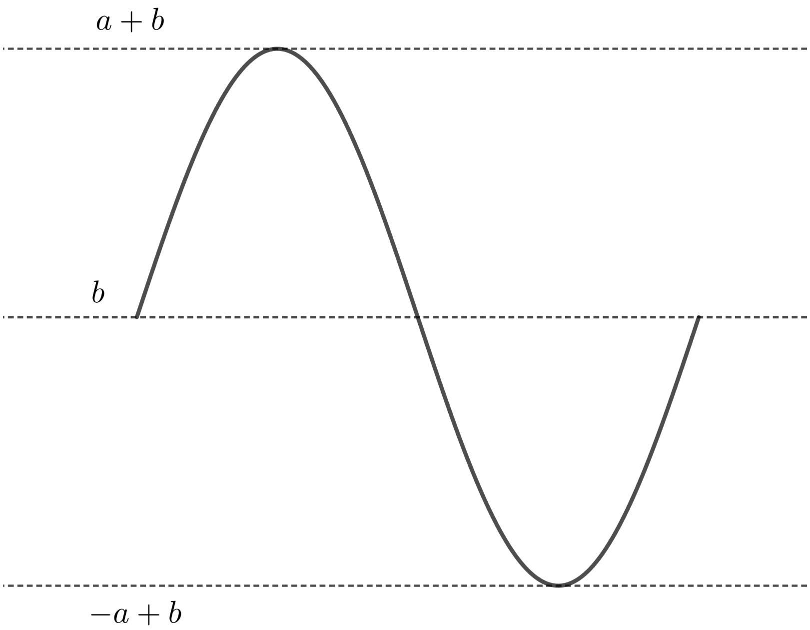
2025 6월 모의고사 20번

난이도 : 중

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

$a+b$의 최대 / 최소를 구하는 문제인데, a, b가 각각 5이하의 자연수이다.

sin함수의 한 주기 개형을 살펴보며,
x축과 평행한 직선과 주어진 함수가 가지는 교점의 개수를 살펴보자.

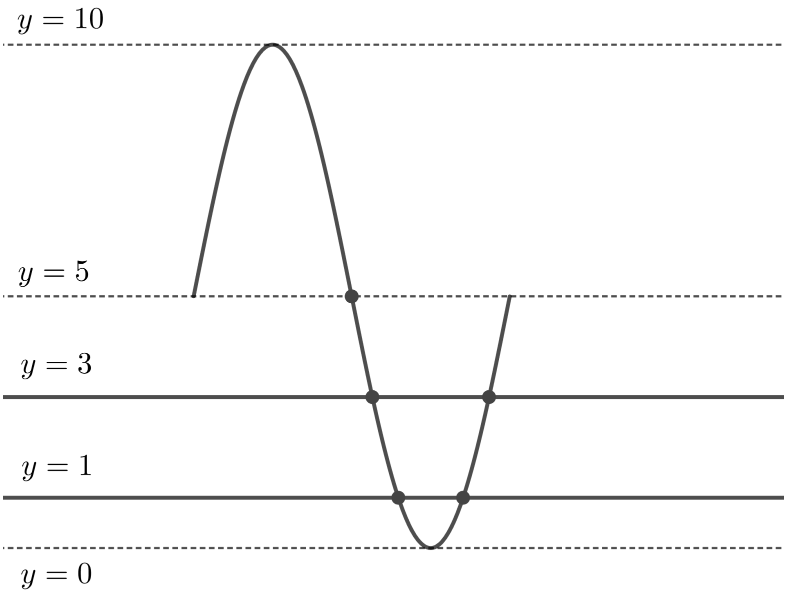


1) $y=a+b,\ b,\ -a+b$일 때 **교점 1개** ⋯ ㉠
2) $-a+b<y<b$, $b<y<a+b$에서 각각 **교점 2개** ⋯ ㉡
를 갖는다.

"여기서 케이스 분류를 할 수도 있겠으나, 상황이 오히려 복잡해질 것 같다."

"일단은, **최대 지점$(5,\ 5)$에서 조금씩 줄여나가며** 되는 케이스 발견해서 최대를 찾고,
반대로 **최소 지점$(1,\ 1)$에서 조금씩 키워나가서** 되는 케이스 발견해서 최소를 찾자."

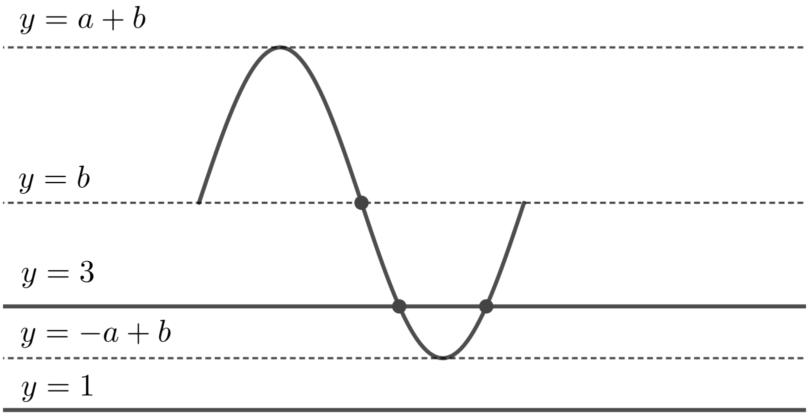
먼저, $(a,\ b)$가 $(5,\ 5)$인 경우를 살펴보면,



$y=1$과 $y=3$에서 가지는 교점의 개수만 따져보아도 벌써 4개다.

이를 통해 알 수 있는 것은,
적어도 최대를 구할 때, $y=a\sin x+b$의 최솟값$(-a+b)$가 1보다 작아서는 안된다는 것이다.

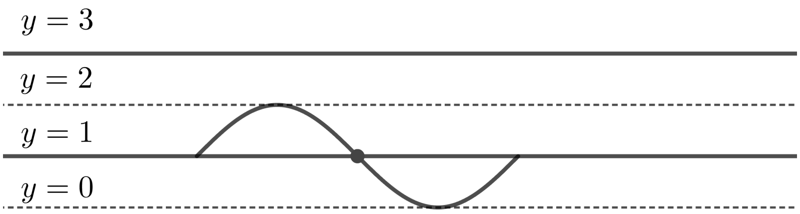
그리고, b가 3보다 크다면, 최솟값$(-a+b)$이 2일 때,
아래의 그림과 같이 $n(A\cup B\cup C)=3$이 될 수 있을 것 같다.



최대인 경우를 구하기 위해 $b=5$라고 하면, 이때 $a=3$일 것이다.

따라서, $a+b$의 최댓값은 8이다.

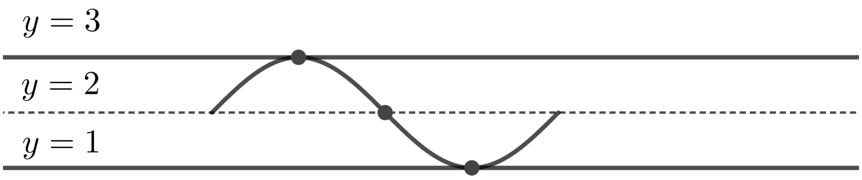
이제, 반대로 $(1,\ 1)$인 경우도 살펴보자.



이 상태에서는 $n(A \cup B \cup C)=1$이다.

그 이유는, 최댓값$(a+b)$가 3보다 작고, $b=1$이기 때문에 $y=1$과의 교점이 $x=\pi$와의 교점과 겹치기 때문이다.

그렇다면, 살짝만 더 크게, $(a,\ b)$가 $(1,\ 2)$일 때를 살펴보자.
($a+b=3$이 되고, $b \neq 1$이기 때문에 $n(A \cup B \cup C)$이 **2개 정도 더 커질 것이라는 예측**을 할 수 있다.)



이때, 위와 같이 $n(A \cup B \cup C)=3$이 됨을 확인할 수 있다.

따라서, $a+b$의 최솟값은 3이다.

$\therefore\ 8 \times 3 = 24$

답: 24

1

2025 6월 모의고사 21번

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a) \leq 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0) = 0$, $f'(1) = 0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

사차함수를 구하는 문제다. 조건을 해석하고, 계산으로 밀고 나가자고 생각하자.

(가)로부터 $f(x)$가 $x = 2$에서 극소를 갖고, 2 이후로는 항상 증가해야 한다는 사실을 알 수 있다.

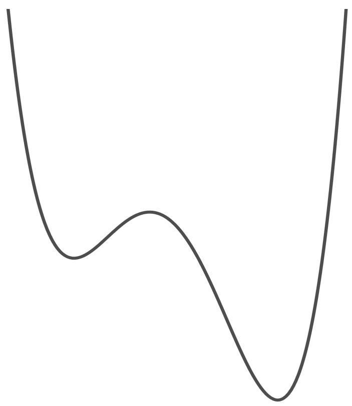
또한, (나)로부터 $y = \frac{8}{3}$에서

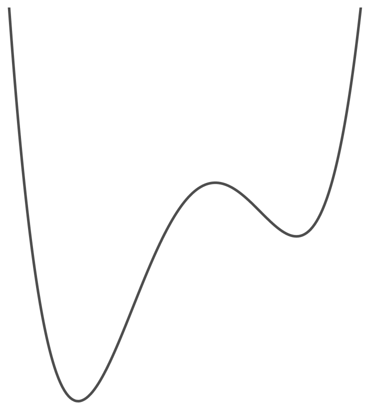
두 극소 중 극솟값이 더 큰 극소점이 존재한다는 사실을 추론할 수 있다.

(더 작은 극소점에서 원소의 개수가 $0 \to 1 \to 2$개가 되고, 더 큰 극소점에서 $2 \to 3 \to 4$개가 된다.)

(두 극솟값이 같은 경우도 고려해볼 수 있겠으나, 굳이 발문에서 원소의 개수가 '3'임을 언급한 것으로 보아, 이 경우는 가장 후순위로 다루기로 하자.)

그렇다면, 다음과 같은 두 가지 개형을 떠올릴 수 있다.



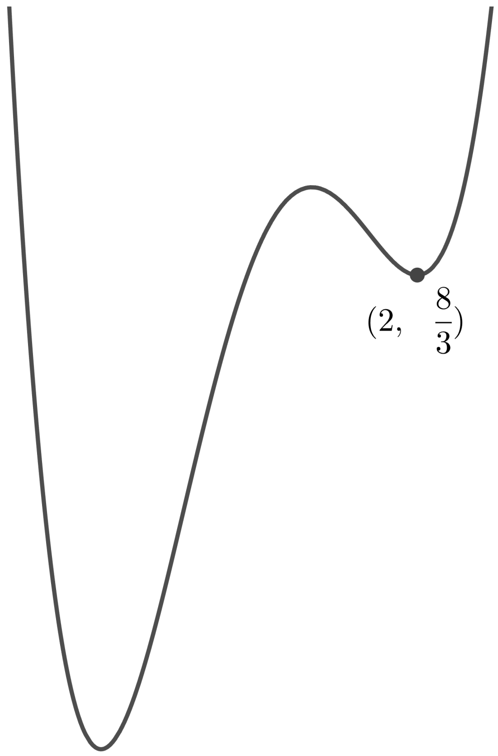


또한, (나) 아래의 발문을 살펴보면

'$f(0)=0$'

$x=0$에서 극솟값인 $\frac{8}{3}$보다 작은 함숫값을 갖고 있으므로,
대략적으로 왼쪽 극소보다는 **오른쪽 극소**$(x=2)$**의 극솟값이 클 것**이라고 예측할 수 있다.
(즉, 오른쪽 극소의 극솟값이 $\frac{8}{3}$이다.)

또한, $f'(1)=0$임을 통해 **왼쪽 극소**가 $x=1$이거나, 혹은 그보다 왼쪽에 있음을 알 수 있다.



일단,
1) 오른쪽 극소가 $\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$임을 이용해 $f(x)$에 관한 식을 세운 뒤,
2) $f(0)=0$, $f'(1)=0$을 대입해보도록 하자.

1) 먼저, $f(x)$의 식을 세워보면
$f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)+\frac{8}{3}$,
양변을 미분하면 $f'(x)=(x-2)^2(2x+a)+2(x-2)(x^2+ax+b)$이다.

2) 그 뒤, 두 조건을 대입하면
$f(0)=4b+\frac{8}{3}=0 \Rightarrow b=-\frac{2}{3}$

$f'(1)=(2+a)-2(a+b+1)=-a-2b=0 \Rightarrow a=-2b=\frac{4}{3}$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)+\frac{8}{3}$

따라서, $f(3)=9+4-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=15$이다.

답: 15

1

난이도 : 중

2025 6월 모의고사 22번

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

초항을 물어보고 있으므로, **수열을 역추적**하는 문제이다.

a_n을 좌변에 빼놓고 식을 다시 세워보면,

$$a_n = \begin{cases} a_{n+1} + \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수, } a_n > 0) \\ a_{n+1} - 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

"이제 $a_{15} = 1$에서부터 역추적해보자.
대략적으로 추측해보면, **$4, 9$번째 항**(제곱수)**의 부호**에 따라 케이스를 나눠가면서 역추적하는 형태가 될 것 같다."

15에서부터 9까진 **제곱수**가 나오지 않으므로,
두 번째 경로($a_{n+1} - 1$)로 역추적하면

$a_{10} = 1 - 5 = -4$이다.

이제, a_9의 부호에 따라 케이스를 나누어야한다.

i) $a_9 \le 0$일 경우,

$a_9 = a_{10} - 1 = -5 \Rightarrow a_5 = -9$

1) $a_4 \le 0$일 때, $a_4 = -10 \Rightarrow a_2 = -12$, $a_1 = 12$

2) $a_4 > 0$일 때, $a_4 = a_5 + 2a_2 = -9 + 2a_2$ $\left(a_2 < \frac{9}{2}\right)$이고, a_2에서부터 순방향으로 a_4를 구해보면

$a_4 = a_2 + 2$이므로, $-9 + 2a_2 = a_2 + 2 \Rightarrow a_2 = 11$, $a_1 = -11$

$ii)$ $a_9 > 0$일 경우,

$$a_9 = a_{10} + 3a_3 = 3a_3 - 4 \ \left(a_3 > \frac{4}{3}\right) \Rightarrow a_5 = 3a_3 - 8$$

1) $a_4 \leq 0$일 때, $a_4 = 3a_3 - 9$ $(a_3 \leq 3)$이고, $a_3 = a_4 - 1 = 3a_3 - 10 \Rightarrow a_3 = 5$이므로, 모순된다.

2) $a_4 > 0$일 때, $a_4 = a_5 + 2a_2 = (3a_3 - 8) + 2a_2 = 5a_2 - 5$ $(a_2 > 1)$이고,

$a_2 = 5a_2 - 7 \Rightarrow a_2 = \frac{7}{4}$, $a_1 = -\frac{7}{4}$이다.

$\therefore$ $12 \times (-11) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = 231$

답: 231

28. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [4점]

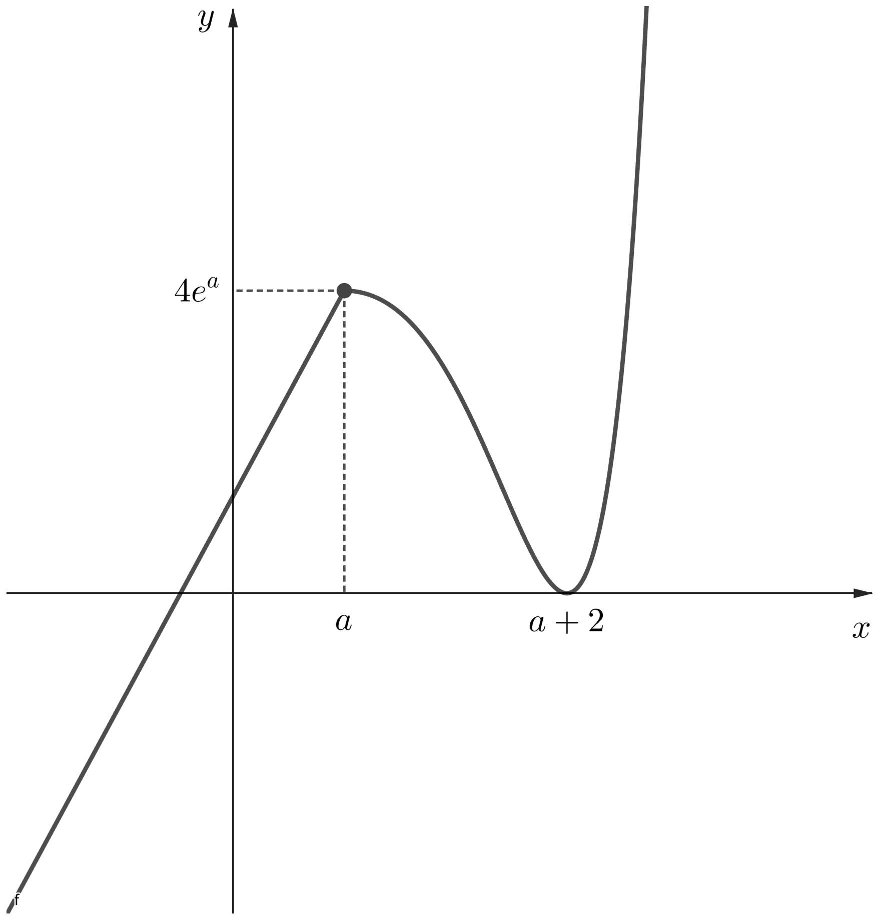
① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

$f(x)$의 그래프를 살펴보자.

왼쪽 구간($x<a$)은 직선에, 기울기가 e^{2a}이고 $(a,\ 4e^a)$를 지난다.

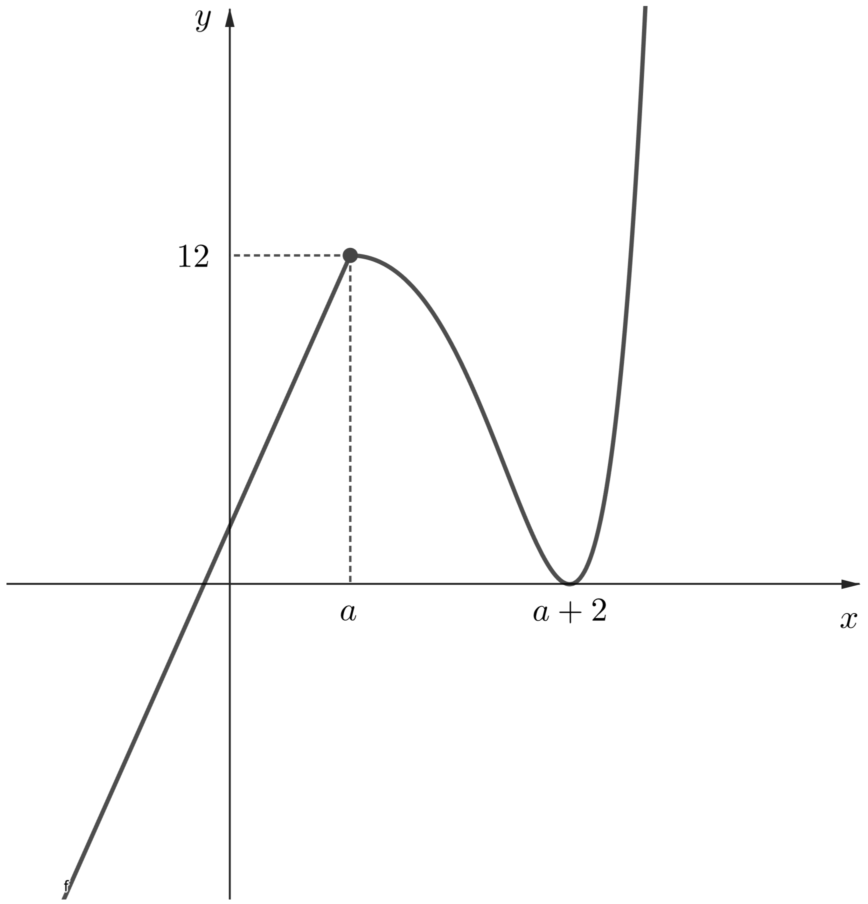
오른쪽 구간($x\geq a$)은 초월함수에, 마찬가지로 $(a,\ 4e^a)$를 지나고, $x=a+2$에서 x축과 접한다.
오른쪽 구간을 미분해보면 $(x-a)(x-a-2)e^x$로, $x=a$일 때 기울기가 $-2e^a$이다.

이를 그려보면 다음과 같다.
(그림은 a가 양수일 때를 나타낸 것으로, 음수일 경우에도 $(a,\ 4e^a)$이 2사분면으로 갈 뿐 개형 자체는 크게 다르지 않다.)



$y=t$ 직선을 점점 위로 올려나가다 보면, $g(t)$가 $t=4e^a$, 즉 $(a,\ 4e^a)$에서 불연속적으로 바뀐다는 것을 알 수 있다.

따라서, $4e^a=12 \Rightarrow e^a=3$



$f(g(t)) = t$이므로, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$이다.

이제, $g'(f(a+2))$, $g'(f(a+6))$을 계산해보자.

1) 먼저, $g'(f(a+2))$를 구해보면, $g'(f(a+2)) = \dfrac{1}{f'(g(f(a+2))}$이다.

여기서, $g(f(a+2)$는 $y=f(x)$가 x축과 만나는 왼쪽 구간$(x<a)$에서의 x좌표인데,
이 값과는 무관하게 왼쪽 구간의 직선의 기울기가 e^{2a}이므로,

$$g'(f(a+2)) = \frac{1}{f'(g(f(a+2))} = \frac{1}{e^{2a}} = \frac{1}{9}$$ 이다.

$2)$ 이제 $g'(f(a+6))$를 구해보면, $g'(f(a+6))=\frac{1}{f'(g(f(a+6)))}=\frac{1}{f'(a+6)}$이다.

($y=f(x)$와 $y=f(a+6)$의 교점은 한 개 뿐이기 때문이다.)

앞서 구했듯, 오른쪽 구간($x \geq a$)의 미분식은 $\frac{dy}{dx}=(x-a)(x-a-2)e^{x}$이므로,

$g'(f(a+6))=\frac{1}{f'(a+6)}=\frac{1}{24e^{a+6}}=\frac{1}{72}e^{-6}$이다.

따라서, 답을 구해보면 $\frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{72}e^{-6}}=8e^{6}$이다.

답: ④

2024 6월 모의고사 29번

난이도 : 중

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
$a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

주어진 조건은 '실수 전체에서 미분 가능함'밖에 없네.

일단 이를 바탕으로 **기본적인 관계식**(구간의 경계($x=b$)에서 연속성 / 미분가능성 확인하기)을 이끌어 내 보자.

1) $f(b)=-f(b-c)$
2) $f'(b)=-f'(b-c)$

우리가 구해야 되는 미지수는 3개인데, 식은 2개로 **하나가 부족**하다.

문제를 다시 읽어 보아도 특별히 더 준 조건이 없다. 그렇다면 남은 경우는 하나 뿐이다.
"이 상황(주어진 식) 자체가 매우 특별하겠구나."

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$$

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}$$

곰곰이 생각해보면, 1)의 방정식은 **$\log$함수와 다항함수와의 관계식**이다.
그 말은, '매우 특별한 경우'가 아니고서야 고등학교 수준에서 **그 방정식의 근을 구할 수 없다**는 것이다.

(게다가, 다른 관계식에는 $\log$함수와 관련된 항이 없어 연립할 수도 없다.)

보통, $\log$함수와 다항함수와의 관계식이 고등학교 수준에서 계산가능하려면,
$\log$와 관련된 항들이 미리 소거되어야한다.

그렇게 되기 위해서, 관계식 1)에서 **$\log$와 관련된 항**들만 따로 빼서 생각해보면,
$\log(b^2+1)=-\log\{(b-c)^2+1\}$을 만족해야한다.

따라서, $\log(b^2+1)=-\log\{(b-c)^2+1\} \Rightarrow (b^2+1)\{(b-c)^2+1\}=1 \Rightarrow b=0$ 또는 $b=c$이다.

그러나, 발문에서 b는 양수라고 하였으므로, $b=c$이다.

"이제, 두 관계식 1), 2)만으로도 모든 미지수를 구할 수 있겠다."

1) $f(b)=-f(b-c) \Rightarrow f(b)+f(0)=0$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$이므로,

$f(b)+f(0)=\frac{1}{3}b^3-b^2+\ln(1+b^2)+2a=0 \ \cdots$ ㉠

2) $f'(b)=-f'(b-c) \Rightarrow f'(b)+f'(0)=0$

$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}$ 이므로,

$f'(b)+f'(0)=b^2-2b+\frac{2b}{1+b^2}=\frac{b}{1+b^2}\times(b(b^2+1)-2(b^2+1)+2)$

$=\frac{b}{1+b^2}\times(b^3-2b^2+b)=\frac{b^2}{1+b^2}(b-1)^2=0$

$\therefore \ b=1$

이를 다시 ㉠에 대입해보면, $\frac{1}{3}b^3-b^2+\ln(1+b^2)+2a=-\frac{2}{3}+\ln2+2a=0$

$\therefore \ a=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln2$

$b=c$이므로, 이제 $a+b+c$를 구하면

$a+b+c=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln2$이다.

$\therefore \ 30(p+q)=30\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)=55$

답: 55

2024 6월 모의고사 30번

30. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

일단 식을 세워보자.

$$\tan a_n=\frac{\sqrt{a_n}}{10}$$

$\tan^2(a_{n+1}-a_n)$은 그냥 봐서 특별한 무언가를 이끌어내기 어려워 보인다. **삼각함수의 덧셈공식**을 사용해 풀어 보자.

$$\tan^2(a_{n+1}-a_n)=\left\{\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_n\tan_{n+1}}\right\}^2=\left\{\frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\frac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}}\right\}^2=\frac{100(a_{n+1}+a_n-2\sqrt{a_{n+1}a_n})}{10000+200\sqrt{a_na_{n+1}}+a_na_{n+1}}$$

그림을 그려보면 (혹은 대략적으로 떠올리기만 해도 된다.)

첫 번째 교점은 $(0,\ 0)$이므로 $a_1=0$이고,

$n\to\infty$일 때 두 그래프의 교점의 y좌표는 ∞로 발산하므로,

n번째 교점의 x좌표는 **한 주기의 $\tan$내에서 가장 오른쪽**인 $(n-1)\pi$에 근사한다.

따라서, $n\to\infty$일 때 $a_n\to(n-1)\pi$이다.

또한 해당 상황에서 분모에서 유의미하게 영향을 주는 건 a_na_{n+1}밖에 없으므로, 그것만 생각하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}n^3\pi^3\frac{100(a_{n+1}+a_n-2\sqrt{a_na_{n+1}})}{a_na_{n+1}}$$

$$=100\pi\times\lim_{n\to\infty}n^3\times\frac{(2n-1)\pi-2\pi\sqrt{n(n-1)}}{n(n-1)\pi^2}=100\times\lim_{n\to\infty}n\{(2n-1)-2\sqrt{n(n-1)}\}$$

$$=100\times\lim_{n\to\infty}n\left\{\frac{4n^2-4n+1-4n^2+4n}{2n-1+2\sqrt{n(n-1)}}\right\}=100\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1+2\sqrt{n(n-1)}}=25$$

답: 25