2024학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 23 한승수)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$2^{2\sqrt{2}+2} \times \dfrac{1}{4^{\sqrt{2}-1}}$

$= 2^{2\sqrt{2}+2} \times 4^{-\sqrt{2}+1}$

$= 2^{2\sqrt{2}+2} \times 2^{-2\sqrt{2}+2}$

$= 2^4$

$= 16$

2) [정답] ③ (출제자 : 23 한승수)

[출제의도] 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = x^2 + 4x$ 에서

$f'(x) = 2x + 4$ 이다.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+3h) - f(-1)}{h}$

$= 3\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+3h) - f(-1)}{3h}$

$= 3f'(-1)$

$= 6$

3) [정답] ② (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 파악하고 탄젠트 함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta > 0$ 이므로 $\cos\theta = \sqrt{\cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 이고 θ 의 범위는 $\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이다.

$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\dfrac{5}{9}} = -\sqrt{\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{2}{3}$ 이므로,

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

4) [정답] ⑤ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 함수의 그래프의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1$ 이고 $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 1$ 이므로

$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) + \lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 2$ 이다.

5) [정답] ④ (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 등차수열을 계산할 수 있는가?

[해설]

$a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4 = 0$ 이다.

따라서 $a_4 = 0$ 이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하자.

$|a_2| = a_5 + 3$ 이므로 $|a+d| = a + 4d + 3$ 이다.

ⅰ) $a_2 > 0$ 일 때,

$a + d = a + 4d + 3$ 이고, $a_4 = 0$ 이므로

$a = 3$, $d = -1$ 이다.

첫째항이 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ⅱ) $a_2 < 0$ 일 때,

$-a - d = a + 4d + 3$ 이고, $a_4 = 0$ 이므로

$a = -9$, $d = 3$ 이다.

첫째항이 양수이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a_n = -9 + 3(n-1)$ 이고,

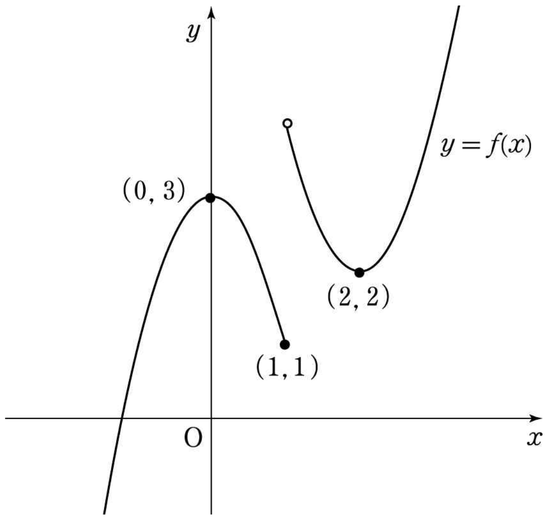
$a_7 = -9 + 3(7-1) = -9 + 18 = 9$ 이다.

6) [정답] ③ (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 극대, 극소의 정의를 이해하는가?

[해설]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 3, $x=1$ 에서 극솟값 1, $x=2$ 에서 극솟값 2 를 가진다.

그러므로 모든 극값의 합은 $3+1+2=6$ 이다.

[참고] 함수의 극대와 극소의 교과서 정의

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \le f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대라 하며, $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다.

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \ge f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소라 하며, $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

7) [정답] ① (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 사인법칙과 원의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R 라 하자.

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$ 이므로

$R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{3}$

$\sin C=\overline{AB}\times\dfrac{\sin B}{\overline{AC}}=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle C=\dfrac{\pi}{3}$

$\angle A=\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{12}\pi$

따라서 $\angle BOC=2\times\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$ 이므로

삼각형 OBC 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\sin\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\sin\left(\pi-\dfrac{5}{6}\pi\right)=3$

8) [정답] ④ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 속도를 활용하여 움직인 거리를 구할 수 있는가?

[해설]

$v(t)=6t^2+x(2)t$ 이고 점 P 는 $t=0$ 일 때 점 A(3) 에서 출발하므로

$x(t)=2t^3+\dfrac{x(2)}{2}t^2+3$ 이다.

$x(t)=2t^3+\dfrac{x(2)}{2}t^2+3$ 에서 $t=2$ 를 대입하면 $x(2)=-19$ 이다.

$v(t)=6t^2-19t$ 에서 시각 t 에서의 가속도를 $a(t)$ 라 했을 때,

$a(t)=12t-19$ 이고 점 P 의 가속도가 5 가 될 때의 시각은

$a(t)=12t-19=5$ 이므로 $t=2$ 이다.

따라서 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_0^2|6t^2-19t|\,dt=\int_0^2(-6t^2+19t)\,dt$$
$$=\left[-2t^3+\frac{19}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=22 \text{ 이다.}$$

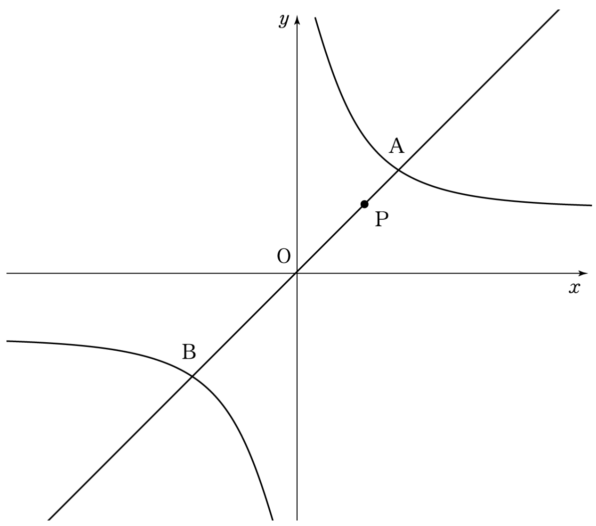
9) [정답] ① (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 두 지수함수의 그래프의 관계를 파악할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 에 대하여 $-f(-x)=-2^{x+3}+a$ 이다. $-f(-x)=g(x)$ 를 만족하므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프와 같다.

또한, 직선 $y=x$ 의 그래프도 원점에 대하여 대칭인 함수이므로 원점에 대하여 대칭관계인 두 함수의 그래프와 직선 $y=x$ 의 그래프의 두 교점 A, B 는 서로 원점에 대하여 대칭인 관계이다.



점 A 의 좌표를 (α,α) 라고 하면, 점 B 의 좌표는 $(-\alpha,-\alpha)$ 이다.

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AO}+\overline{OB}$ 이고, $5\overline{AP}=\overline{PB}$, $\overline{AO}=\overline{OB}$ 이므로

$3\overline{AP}=\overline{AO}$ 이다. 그러므로 $\overline{AO}:\overline{PO}=3:2$ 이다.

따라서 $\alpha=3$ 이다.

점 A 의 좌표는 $(3,3)$ 이고, 점 A 는 함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 $f(3)=1+a=3$, $a=2$ 이다.

따라서 $f(a)=f(2)=2+2=4$ 이다.

10) [정답] ⑤ (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 함수의 극한으로 미정계수 결정할 수 있는가?

[해설]

$f(x)$ 의 최고차항을 ax^n $(a \neq 0)$이라 하자.

조건 (가)에서

$n=1$ 일 경우 $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{ax} = \frac{1}{a}$ 이고

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax}{x^3} = 0$ 이므로 등식이 성립하지 않는다.

$n=2$ 일 경우 $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{ax^2} = 0$ 이고

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2}{x^3} = 0$ 이므로 등식이 성립한다.

$n=3$ 일 경우 $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{ax^3} = 0$ 이고

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^3}{x^3} = a$ 이므로 등식이 성립하지 않는다.

$n>3$ 일 경우 $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{ax^n} = 0$ 이고

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{x^3} = \infty$ 이므로 등식이 성립하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이다.

조건 (나)에서

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+8}}{f(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{f(x)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}\right)} = \frac{1}{12}$

이고,

$\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$이므로 $\lim_{x \to 1}\left\{f(x)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}\right)\right\} = 0$이어야

한다.

$\lim_{x \to 1}\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}\right) \neq 0$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ 이다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $f(1) = 0$ 이다.

이차함수 $f(x)$가 $f(1) = 0$ 이고 $f(0) = 0$ 이므로

함수 $f(x)$를 $f(x) = ax(x-1)$ $(a \neq 0)$라 하자.

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+8}}{f(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{ax(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}\right)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{ax\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}\right)} = \frac{1}{6a} = \frac{1}{12}$ 이므로

$a = 2$ 이고 $f(x) = 2x(x-1)$ 이다.

$f(4) = 2 \times 4(4-1) = 24$ 이다.

11) [정답] ④ (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용해서 원하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이고 $\tan\alpha\tan\beta = -1$ 이므로

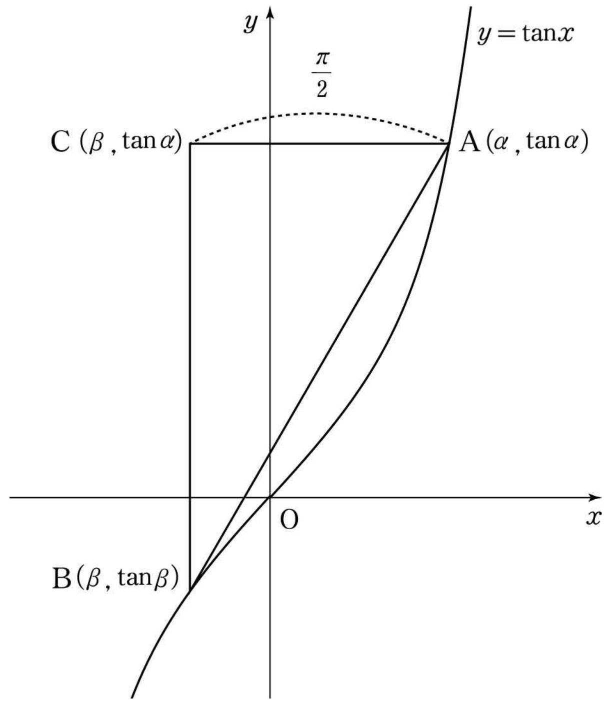
$\tan\left(\frac{2n-1}{2}\pi + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$ (n은 정수)

$\tan\beta = \tan\left(\frac{2n-1}{2}\pi + \alpha\right)$

$\alpha - \beta = -\frac{2n-1}{2}\pi$

$\alpha > \beta$ 이고 $0 < -\frac{2n-1}{2}\pi < \pi$ 이므로 $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ 이다.

$n = 0$ 이므로 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ 이다.



삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right) = 4$ 이므로

$\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{16}{\pi}$ 이다.

$$\tan(\angle \mathrm{ABC}) = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}} = \frac{\pi^2}{32}$$

따라서 $\tan(\angle \mathrm{ABC}) = \frac{\pi^2}{32}$ 이다.

12) [정답] ③ (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 함수의 연속을 이용할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to t} g(x)$ 와 $\lim_{x \to t} g(-x)$ 의 값이 존재하면 $\lim_{x \to t} g(x)g(-x)$ 의 값은 존재한다. $t \neq 1$, $t \neq 2$ 일 때 $f(x)$ 에 관계없이 $\lim_{x \to t} g(x)g(-x)$ 의 값이 존재한다. 그러므로 $\lim_{x \to 1} g(x)g(-x)$ 와 $\lim_{x \to 2} g(x)g(-x)$ 의 값이 존재해야 한다.

$\lim_{x \to 2} g(x)$ 는 발산하므로 $\lim_{x \to 2} g(x)g(-x)$ 의 값이 존재하려면

$\lim_{x \to 2} g(-x) = 0$ 이어야 한다. 그러므로

$\lim_{x \to -2} g(x) = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 0$ 이다.

ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x = 1$ 에서 연속일 때

$\lim_{x \to 1} g(x)g(-x)$ 의 값은 존재하므로 $f(1) = -1$ 이다.

따라서 $f(x) = (x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right)$ 이므로 $f(4) = 16$ 이다.

ii) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 불연속일 때

$\lim_{x\to1} g(x)$은 발산하므로

$\lim_{x\to1} g(x)g(-x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to1} g(-x)=0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1} g(-x) = \lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1} f(x) = f(-1)=0$이다.

따라서 $f(x)=(x+2)(x+1)$이므로 $f(4)=30$이다.

i), ii)에 의하여 가능한 모든 $f(4)$의 값의 합은 46이다.

[별해]

$$g(-x) = \begin{cases} f(-x) & (x > -1) \\ -\dfrac{1}{x+2} & (x \le -1) \end{cases}$$

모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t} g(x)g(-x)$의 값이 존재하는지 확인하기 위하여 함수 $g(x)g(-x)$를 구하면 다음과 같다.

$$g(x)g(-x) = \begin{cases} -\dfrac{f(x)}{x+2} & (x \le -1) \\ f(x)f(-x) & (-1<x<1) \\ \dfrac{f(-x)}{x-2} & (x \ge 1) \end{cases}$$

모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t} g(x)g(-x)$의 값이 존재하려면

$f(-2)=0$, $-f(-1)=f(-1)f(1)$이어야 한다.

따라서 $f(-2)=0$, $f(-1)=0$이거나

$f(-2)=0$, $f(1)=-1$이다.

13) [정답] ④ (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 미분가능성의 의미를 알고 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

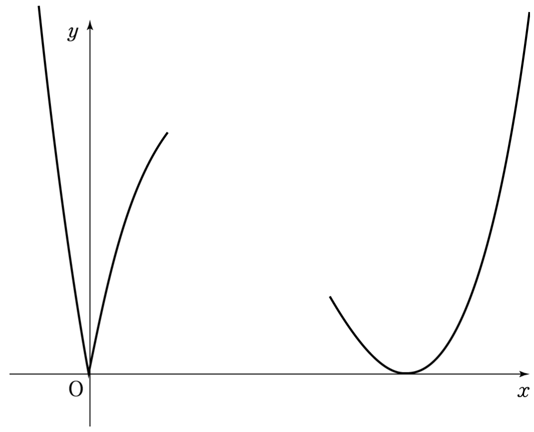
[해설]

함수 $g(x)$는 $x\ne1$, $x\ne3$일 때 항상 미분가능하므로, $x=1$ 또는 $x=3$에서만 미분가능하지 않을 수 있다. 따라서, α는 1, 2, 3의 값을 가질 수 있다.

함수 $|g(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않고, $x=1$ 또는 $x=3$에서 미분가능하지 않을 수 있다. 또한, 함수 $f(x)$가 $1\le x\le3$에서 x축과 만나는 점의 개수에 미분가능하지 않은 점의 개수가 달라지므로 β는 1, 2, 3, 4, 5의 값을 가질 수 있다.

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수와
함수 $|g(x)|$가 $x=\beta$에서 미분가능하지 않은 실수 β의 개수가 서로 같기 위해선 $\alpha=\beta=1$이거나 $\alpha=\beta=2$이다.

i) $\alpha=\beta=1$일 때

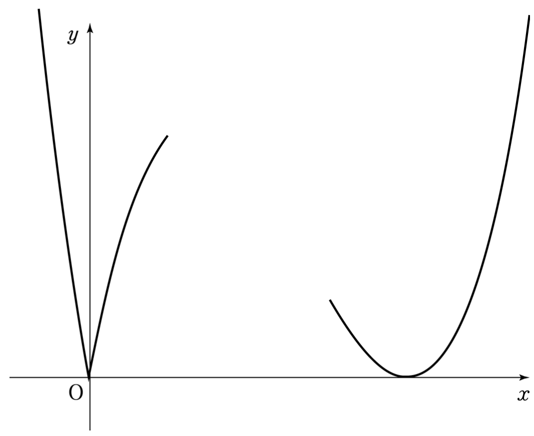


$x<1$ 또는 $x>3$에서 $y=|x^3-8x^2+16x|$의 그래프는 위와 같다.
$\beta=1$이 되려면 $x=1$, $x=3$에서 함수 $|g(x)|$는 미분가능해야 하고,
함수 $|f(x)|$는 $1<x<3$에서 미분가능해야 한다.

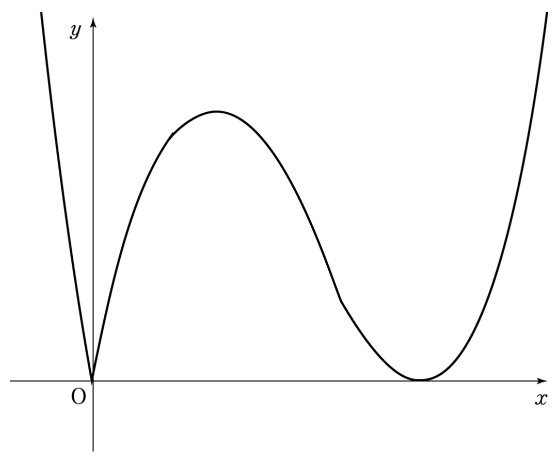
$h(x)=x^3-8x^2+16x$라 하면 $h(1)=|f(1)|$, $h'(1)=|f'(1)|$,
$h(3)=|f(3)|$, $h'(3)=|f'(3)|$이다. 이때, 함수 $|f(x)|$가
$1<x<3$에서 미분가능해야 하고 $f(x)$가 이차함수이므로,
함수 $|f(x)|$ 역시 이차함수이다.

이때, $h(1)=|f(1)|$, $h'(1)=|f'(1)|$에서 상수 k에 대하여
$h(x)-|f(x)|=(x-1)^2(x-k)$이다. 이때, $h(3)=|f(3)|$이므로
$k=3$이다. 하지만, $h'(3)-|f'(3)|=4$이므로 $h'(3)=|f'(3)|$을
만족시키지 않는다.

ii) $\alpha=\beta=2$일 때



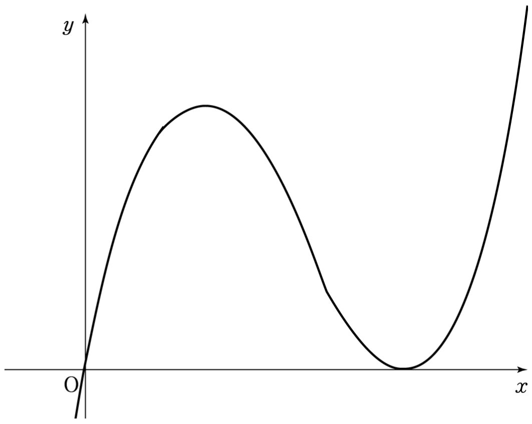
$x<1$ 또는 $x>3$에서 $y=|x^3-8x^2+16x|$의 그래프는 위와 같다.
$\beta=2$가 되려면 함수 $|g(x)|$는 $x=1$, $x=3$ 중 한 점에서만
미분가능해야 한다.

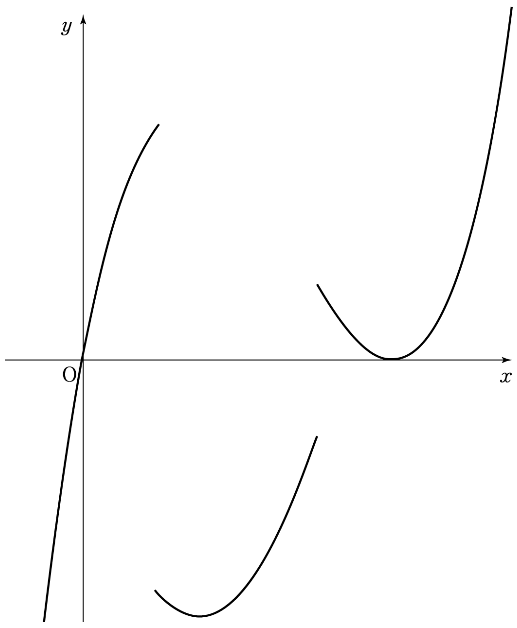


함수 $|g(x)|$가 $x=1$에서 미분가능할 때, $y=|g(x)|$의 그래프는 위와

같다.

이때, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 두 그래프 중 하나이다.





위의 그래프는 미분가능하지 않은 점이 1 개이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.

이는 함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 미분가능할 때도 마찬가지이다.

따라서 함수 $h(x)=x^3-8x^2+16x$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시켜야 한다.
$h(1)=-f(1)$, $h(3)=-f(3)$ 이고,
$h'(1)=-f'(1)$, $h'(3)\neq f'(3)$ 이거나
$h'(1)\neq -f'(1)$, $h'(3)=f'(3)$ 이다.

$h(1)=9$, $h(3)=3$ 에서 $f(1)=-9$, $f(3)=-3$ 이다.
$h'(1)=3$, $h'(3)=-5$ 에서 $f'(1)=-3$ 또는 $f'(3)=5$ 이다.

$f'(1)=-3$ 일 때, $f'(x)=2ax-2a-3$ 이라 하면
$f(x)=ax^2+(-2a-3)x+b$ 에서 $a=3$, $b=-3$ 이다.
따라서 $f(x)=3x^2-9x-3$ 이고, $f'(3)=9$ 에서
$h'(3)\neq -f'(3)$ 이므로 조건을 만족시킨다.

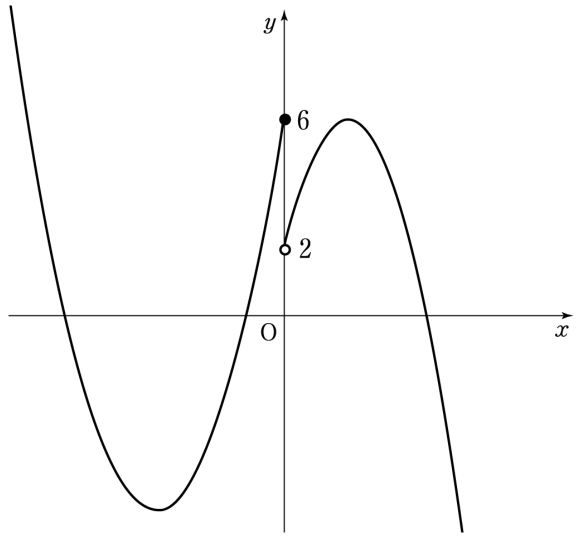
$f'(3)=5$ 일 때, $f'(x)=2ax-6a+5$ 라 하면
$f(x)=ax^2+(5-6a)x+b$ 에서 $a=1$, $b=-9$ 이다.
따라서 $f(x)=x^2-x-9$ 이고, $f'(1)=-9$ 에서
$h'(1)\neq -f'(1)$ 이므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 $f(4)=3$ 또는 $f(4)=9$ 에서 $f(4)$ 의 최솟값은 3 이다.

14) [정답] ② (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 거듭제곱을 활용하여 실근의 개수를 파악할 수 있는가?

[해설]
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x^n)=a$ 에서 $x^n=t$ 라 하면 $f(t)=a$ 이다.
i) $a>6$ 일 때
$f(t)=a$ 를 만족시키는 음의 실근이 한 개 존재한다.
이때, n 이 홀수이면 $n(A_n)=1$, n 이 짝수이면 $n(A_n)=0$ 이다.

ii) $a=6$ 일 때
$f(t)=a$ 를 만족시키는 음의 실근, 0 , 양의 실근이 각각 한 개씩 존재한다.
이때, n 이 홀수이면 $n(A_n)=3$, n 이 짝수이면 $n(A_n)=3$ 이다.

iii) $2<a<6$ 일 때
$f(t)=a$ 를 만족시키는 음의 실근, 양의 실근이 각각 두 개씩 존재한다.
이때, n 이 홀수이면 $n(A_n)=4$, n 이 짝수이면 $n(A_n)=4$ 이다.

iv) $-6<a\leq 2$ 일 때
$f(t)=a$ 를 만족시키는 음의 실근 두 개, 양의 실근 한 개가 존재한다.
이때, n 이 홀수이면 $n(A_n)=3$, n 이 짝수이면 $n(A_n)=2$ 이다.

v) $a=-6$ 일 때
$f(t)=a$ 를 만족시키는 음의 실근 한 개, 양의 실근이 한 개가 존재한다.
이때, n 이 홀수이면 $n(A_n)=2$, n 이 짝수이면 $n(A_n)=2$ 이다.

vi) $a<-6$ 일 때
$f(t)=a$ 를 만족하는 양의 실근이 한 개 존재한다.
이때, n 이 홀수이면 $n(A_n)=1$, n 이 짝수이면 $n(A_n)=2$ 이다.

a 의 범위와 n 에 따른 $n(A_n)$ 의 값은 다음과 같다.

	$a>6$	$a=6$	$2<a<6$
n 이 홀수	1	3	4
n 이 짝수	0	3	4

	$-6<a\leq 2$	$a=-6$	$a<-6$
n 이 홀수	3	2	1
n 이 짝수	2	2	2

$n=1$, $n=2$, $\cdots$, $n=9$ 에서 홀수인 n 은 5 개, 짝수인 n 은 4 개이다.
이때, 방정식 $f(t)=a$ 에서 $a=6$ 일 때 $x=0$, $x=1$ 을 근으로 갖고, 이는 모든 n 에 대하여 중복되는 근이다. 마찬가지로 방정식 $f(t)=a$ 에서

$a=-3$ 일 때 $x=-1$ 을 근으로 갖고, 이는 n 이 홀수일 때 중복되는 근이다.

$a \neq 6$, $a \neq -3$ 일 때 A_1, A_2, $\cdots$, A_9 사이의 공통 원소는 없으므로 $n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_9)$ 의 값을 나타내면 다음과 같다.

$a>6$	$a=6$	$2<a<6$	$-3<a\le 2$
1×5 $=5$	1×5 $+1$ $+1$ $=7$	4×5 $+4\times 4$ $=36$	3×5 $+2\times 4$ $=23$

$a=-3$	$-6<a<-3$	$a=-6$	$a<-6$
2×5 $+2\times 4$ $+1$ $=19$	3×5 $+2\times 4$ $=23$	2×5 $+2\times 4$ $=18$	1×5 $+2\times 4$ $=13$

그러므로 $n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_9) \ge 20$ 이 되도록 하는 a 의 범위는 $-6<a<-3$ 또는 $-3<a<6$ 에서 정수 a 의 개수는 10 이다.

15) [정답] ② (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 해석하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$g(x)$ 는 사차함수이므로 $f(x)|x-a|$ 는 삼차함수이다.
삼차함수 $h(x)=f(x)|x-a|$ 라고 하자.

$$f(x)(x-a)=\begin{cases} -h(x) & (x<a) \\ h(x) & (x\ge a)\end{cases}$$

$f(x)=\dfrac{h(x)}{|x-a|}$ 는 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to a-}\frac{h(x)}{|x-a|}=\lim_{x\to a-}\frac{h(x)}{-(x-a)}$ 와

$\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{h(x)}{|x-a|}=\lim_{x\to a+}\frac{h(x)}{(x-a)}$ 가 같아야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to a-}\frac{h(x)}{-(x-a)}=\lim_{x\to a+}\frac{h(x)}{(x-a)}=0$ 이므로

$h(a)=0$ 이며 $h'(a)=0$ 이다.

따라서 $h(x)=px(x-a)^2\ (p<0)$ 이고 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} px(x-a) & (x<a) \\ -px(x-a) & (x>a)\end{cases}$$

$a>3$ 일 때, $\displaystyle\int_a^3 f(x)\,dx=-\int_3^a f(x)\,dx<0$ 이므로 조건에 모순된다.

따라서 $0<a<3$ 이다.

(나)에서 $\displaystyle\int_0^a px(x-a)\,dx=\int_a^3\{-px(x-a)\}\,dx$ 이므로,

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=0$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_0^3 px(x-a)\,dx&=p\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^3\\&=p\left(\frac{1}{3}\times 3^3-\frac{1}{2}\times 3^2\times a\right)\\&=0\end{aligned}$$

이므로 $a=2$ 이다.

또한 $\displaystyle\int_0^3 px(x-a)\,dx=8$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 px(x-a)\,dx&=p\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^2\\&=p\left(\frac{1}{3}\times 2^3-\frac{1}{2}\times 2^3\right)\\&=8\end{aligned}$$

이므로 $p=-6$ 이다.

$$f(x)=\begin{cases} -6x(x-2) & (x<2) \\ 6x(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

$h(x)=f(x)|x-a|=6x(x-2)^2$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{따라서 } g(1)&=\int_0^1 6x(x-2)^2\,dx\\&=6\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^1\\&=6\left(\frac{1}{4}\times 1^4-\frac{4}{3}\times 1^3+2\times 1^2\right)\\&=\frac{11}{2}\end{aligned}$$

16) [정답] 1 (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

로그의 진수 조건에 의하여

$x+2>0$ 이고 $x^2+2x>0$ 이므로 $x>0$ 이다.

$\log_9(x+2)^2=\log_9(x^2+2x)+\dfrac{1}{2}$

$x^2+4x+4=3(x^2+2x)$

$2x^2+2x-4=0$

$2(x+2)(x-1)=0$ 에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

$x>0$ 이므로 $x=1$ 이다.

17) [정답] 5 (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)\,dx\\&=\int(6x^2-8x+3)\,dx\\&=2x^3-4x^2+3x+C\ \ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(1)=0$ 이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=2x^3-4x^2+3x-1$ 이므로

$f(2)=16-16+6-1=5$ 이다.

18) [정답] 998 (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 수열의 합을 계산할 수 있는가?

[해설]

다항식 $2x^3+2x^2-11$ 을 $x-n$ 으로 나누었을 때의 나머지는
다항식 $2x^3+2x^2-11$ 에 $x=n$ 을 대입한 것과 같다.
따라서 $a_n=2n^3+2n^2-11$ 이다.

$\sum_{k=1}^{6} a_k$ 를 구하면

$$\sum_{k=1}^{6} a_k=\sum_{k=1}^{6}(2k^3+2k^2-11)$$
$$=2\sum_{k=1}^{6}k^3+2\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}11$$
$$=2\left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2+2\left(\frac{6\times 7\times 13}{6}\right)-11\times 6$$
$$=882+182-66$$
$$=998$$

19) [정답] 120 (출제자 : 23 채상진)

[출제의도] 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$\frac{a_1(r^3-1)}{r-1}=a_1(r^2+r+1)=12$ (r 은 공비) 이다.

i) $a_2=8$ 일 때

$a_1=\frac{8}{r}$ 이므로

$\frac{8}{r}(r^2+r+1)=24$

$r^2-2r+1=0$

$r=1$ 이므로 $a_4=a_2\times 1^2=8$ 이다.

ii) $a_2=-8$ 일 때

$a_1=-\frac{8}{r}$ 이므로

$-\frac{8}{r}(r^2+r+1)=24$

$-(r^2+r+1)=3r$

$r^2+4r+1=0$ 이다.

이차방정식의 판별식 $D=4^2-4\times 1\times 1>0$ 이므로
이차방정식의 두 근을 α, β 라고 하면
$a_4=a_2\times\alpha^2$, $a_4=a_2\times\beta^2$ 에서 합은

$$a_2(\alpha^2+\beta^2)=a_2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$
$$=a_2\{(-4)^2-2\}$$
$$=14a_2=-112$$

i), ii)에 의해 가능한 모든 $|a_4|$ 의 합은 $8+|-112|=120$ 이다.

20) [정답] 6 (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 그래프를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

[해설]

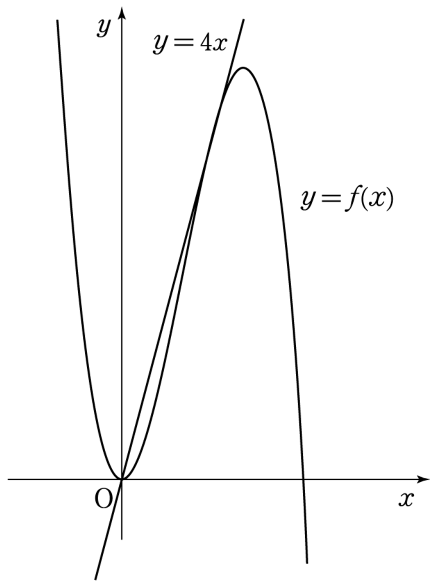
$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8}{x-2}=4$ 에서

$x\to 2$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$ 이다.
함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-8\}=0$ 에서 $f(2)=8$ 이다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$ 이므로 $x=2$ 에서의 접선의 기울기는 4 이다.

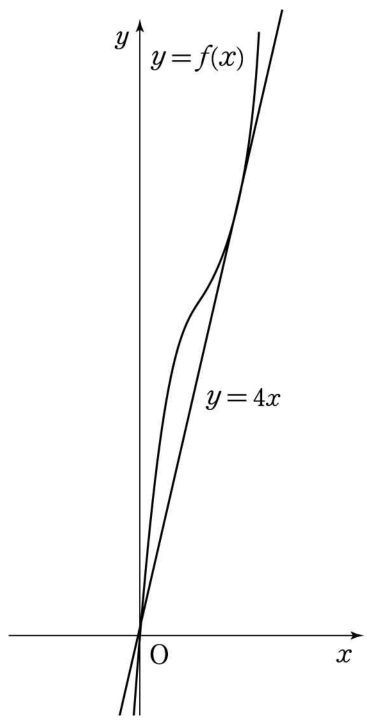
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(2)=4$ 이므로 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 $f(x)-4x=ax(x-2)^2$ 이다.

i) $a<0$ 일 때



$x\geq 0$ 에서 x 에 대한 방정식 $f(x)=mx$ 의 실근의 서로 다른 실근의 개수가 3 이 되도록 하는 m 의 범위는 $0<m<4$ 이므로 자연수 m 의 개수는 3 이다. 따라서 자연수 m 의 개수가 7 이 되도록 하는 a 는 존재하지 않는다.

ii) $a>0$ 일 때



$x\geq 0$ 에서 x 에 대한 방정식 $f(x)=mx$ 의 실근의 서로 다른 실근의

개수가 3이 되도록 하는 m의 범위는 $4 < m < f'(0) = 4a+4$이므로 자연수 m의 개수는 $4a-1$이다. 따라서 자연수 m의 개수가 7이 되도록 하는 $a=2$이다.

ⅰ), ⅱ) 에 의해 $a=2$이므로 $f(x)=2x(x-2)^2+4x$이다.
따라서 $f(1)=6$이다.

21) [정답] 45 (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 통해서 원하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$a_1=0$이므로 $a_2=d$이다.

ⅰ) $d<0$인 경우

$a_1=0$, $a_2=d$, $a_3=2d$, $a_4=3d$, $a_5=4d$, $a_6=5d$
$a_6=5d=0$이므로 $a_6=0$을 만족시키지 못하다.

ⅱ) $d>0$인 경우

$a_1=0$에서 $a_2=d$, $a_3=d-2$
$a_6=0$에서 $a_5=5$ 또는 $a_5=-d$

ⅱ) - (1) $a_5=5$일 때,

$a_3>0$, $a_4>0$인 경우

$a_4=a_3-3=d-5$
$a_5=a_4-4=5$, $a_4=9$이므로
$d-5=9$, $d=14$이다.

$a_3>0$, $a_4\le 0$인 경우
$a_4=a_3-3=d-5$
$a_5=a_4+d=5$, $a_4=5-d$이므로
$d-5=5-d$, $d=5$이다.

$a_3\le 0$, $a_4>0$인 경우
$a_4=a_3+d=2d-2$
$a_5=a_4-4=5$, $a_4=9$이므로
$2d-2=9$, $d=\frac{11}{2}$이다.
$a_3\le 0$, $d\le 2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_3\le 0$, $a_4\le 0$인 경우
$a_4=a_3+d=2d-2$
$a_5=a_4+d=5$, $a_4=5-d$이므로
$2d-2=5-d$, $d=\frac{7}{3}$이다.
$a_3\le 0$, $d\le 2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ⅱ) - (2) $a_5=-d$일 때,

$a_3>0$, $a_4>0$인 경우

$a_4=a_3-3=d-5$
$a_5=a_4-4=-d$, $a_4=4-d$이므로
$d-5=4-d$, $d=\frac{9}{2}$이다.
$a_4=-\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_3>0$, $a_4\le 0$인 경우
$a_4=a_3-3=d-5$
$a_5=a_4+d=-d$, $a_4=-2d$이므로
$d-5=-2d$, $d=\frac{5}{3}$이다.
$a_3>0$, $d>2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_3\le 0$, $a_4>0$인 경우
$a_4=a_3+d=2d-2$
$a_5=a_4-4=-d$, $a_4=4-d$이므로
$2d-2=4-d$, $d=2$이다.

$a_3\le 0$, $a_4\le 0$인 경우
$a_4=a_3+d=2d-2$
$a_5=a_4+d=-d$, $a_4=-2d$이므로
$2d-2=-2d$, $d=\frac{1}{2}$이다.
ⅰ), ⅱ)에 의하여 모든 d의 값의 합은 $14+5+2+\frac{1}{2}=\frac{43}{2}$이다.
따라서 $p+q=45$이다.

22) [정답] 17 (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

$g(x)=\frac{1}{2}\int_2^x f(t)\,dt+a$에서 $g(2)=a$이고,
양변을 미분하면 $g'(x)=f(x)$이다.

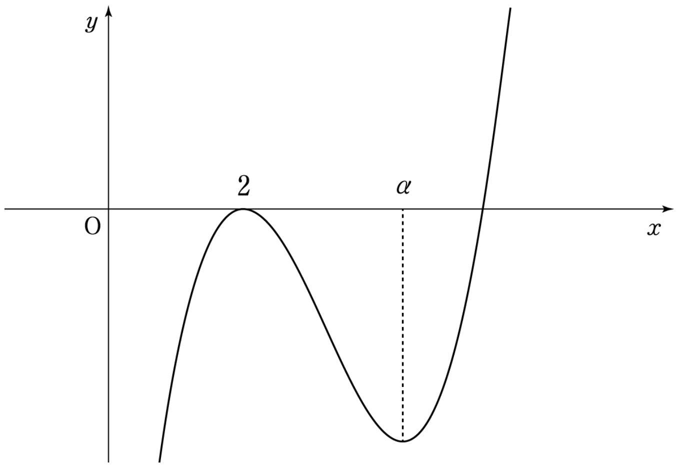
방정식 $f(x)=0$에서 $f(2)=0$이고, 만약 방정식 $f(x)=0$이 $x=2$을 중근으로 갖는다면 방정식 $f(g(x))=0$의 근은 방정식 $g(x)=2$의 근이다.
이때, 삼차함수와 직선은 최대 세 점에서 만나므로 $h(a)=4$를 만족시키는 a는 존재하지 않는다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(x)=0$의 다른 한 근을 α $(\alpha\ne 2)$라 하면
$f(x)=3(x-2)(x-\alpha)$이다.
이때, $F(x)=\int_2^x \frac{f(t)}{2}\,dt$라 하면 $g(x)=F(x)+a$이다.
방정식 $f(g(x))=0$의 실근은 방정식 $g(x)=2$의 실근 또는 방정식 $g(x)=\alpha$의 실근이므로 $F(x)=2-a$의 실근 또는 $F(x)=\alpha-a$의 실근과 같다.
$F(x)=2-a$의 실근의 개수를 $h_1(a)$,
$F(x)=\alpha-a$의 실근의 개수를 $h_2(a)$라 하면
$h(a)=h_1(a)+h_2(a)$이다.

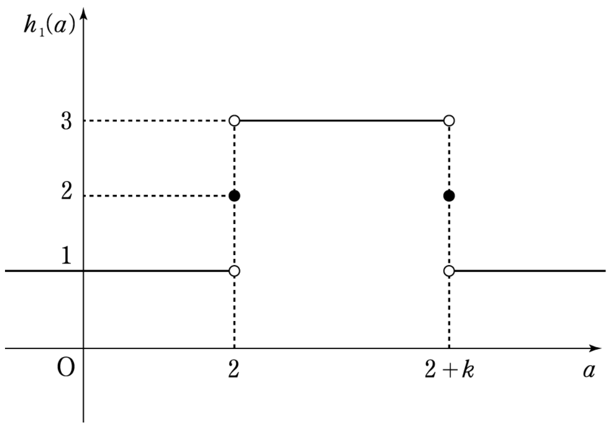
$\alpha > 2$ 일 때와 $\alpha < 2$ 인 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

i) $\alpha > 2$ 일 때

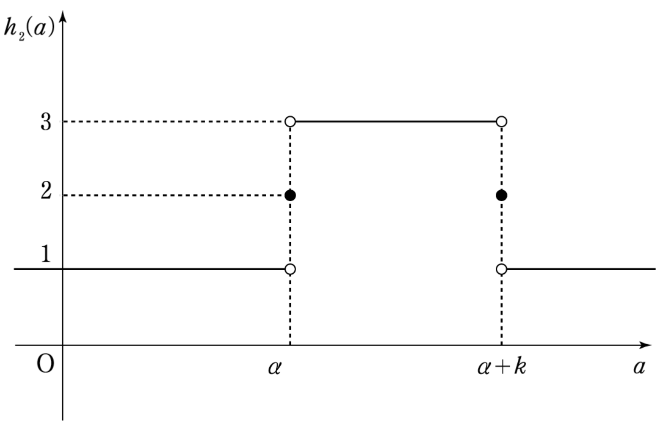
$F(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2\left(x - \dfrac{3}{2}\alpha + 1\right)$ 이므로 $y = F(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$F(\alpha) = -k$ 라 하고 a 의 값에 따른 $h_1(a)$ 의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



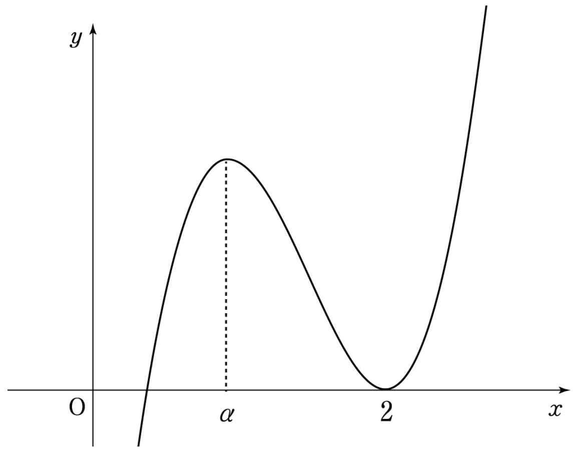
$h_2(a)$ 는 $h_1(a)$ 를 a 축 방향으로 $\alpha - 2 > 0$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로 a 의 값에 따른 $h_2(a)$ 의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



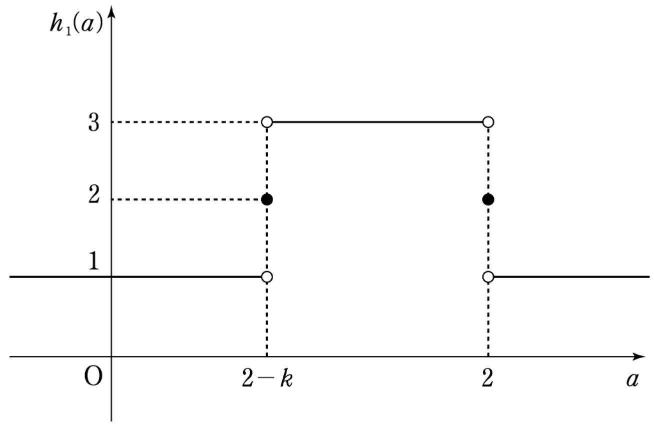
따라서 $a > 2$ 일 때 $h_1(a) = 1$, $h_2(a) = 1$ 이므로 $h(a) = 2$ 로 조건을 만족시키지 않는다.

ii) $\alpha < 2$ 일 때

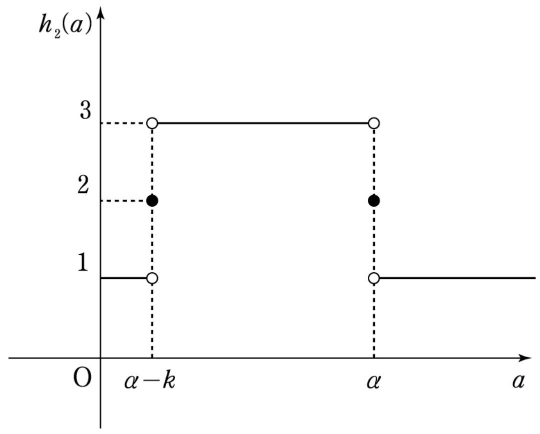
$y = F(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



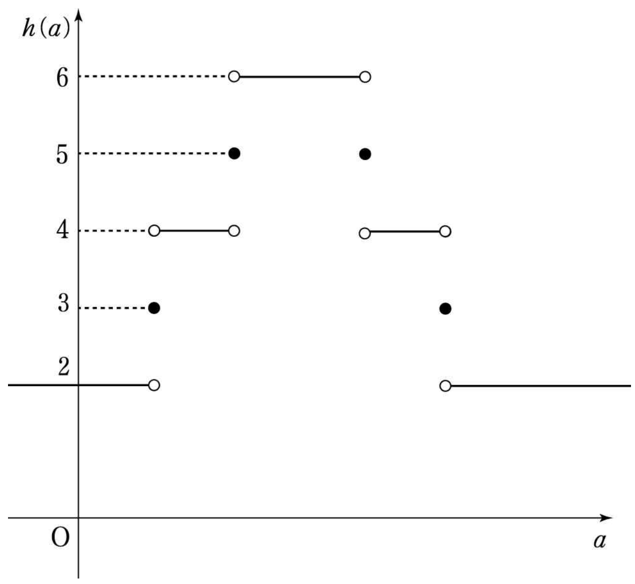
$F(\alpha) = k$ 라 하고 a 의 값에 따른 $h_1(a)$ 의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



$h_2(a)$ 는 $h_1(a)$ 를 a 축 방향으로 $\alpha - 2 < 0$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로 a 의 값에 따른 $h_2(a)$ 의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



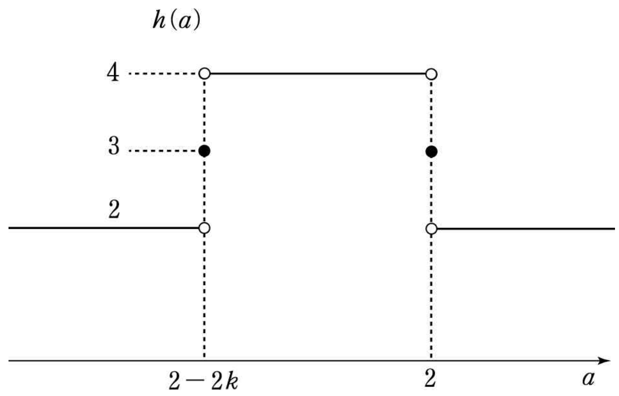
$-k < \alpha - 2 < 0$ 인 경우, $h(a)$ 의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이 경우에서 $h(a) = 4$ 인 경우는 두 열린구간이므로 조건을 만족시키지

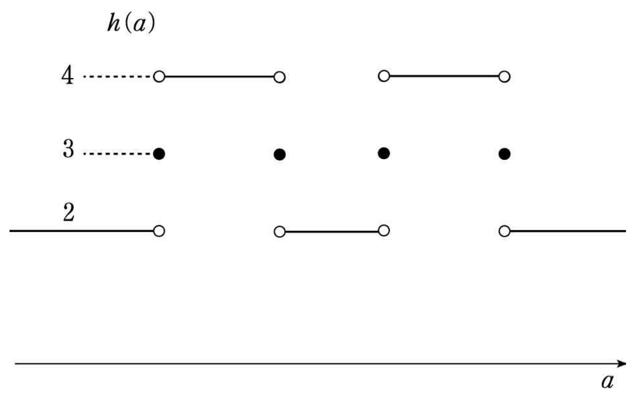
않는다.

$\alpha = -k$ 인 경우, $h(a)$ 의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이 경우에서 $h(a)=4$ 인 경우는 $2-2k<a<2$ 이므로 $2-2k=2$ 이고 $k=2$ 이다. 따라서 $k=2$ 이므로 $\alpha=0$ 이다.

$\alpha-2<-k$ 인 경우, $h(a)$ 의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이 경우에서 $h(a)=4$ 인 경우는 두 열린구간이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ⅰ), ⅱ)에서 조건을 만족시키는 α 의 값은 $\alpha=0$ 이므로 $f(x)=3x(x-2)$ 이다.

$$\begin{aligned} g(5)-g(4) &= \frac{1}{2}\int_2^5 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_4^5 f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_4^5 3x(x-2)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x^3-3x^2\right]_4^5 \\ &= \frac{1}{2}(50-16) = 17 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

2024학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(확률과 통계) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 22 임지훈)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$(2x+1)^5$ 의 전개식에서 x 의 차수가 3 인 항은

${}_5\mathrm{C}_3 \times (2x)^3 \times (-1)^2 = 10 \times 8x^3 \times 1 = 80x^3$ 이므로

x^3 의 계수는 80 이다.

24) [정답] ④ (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 사건의 독립에 대하여 이해하고, 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) = \dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(A \cap B^C) = 1 - \mathrm{P}(A^C \cup B) = \dfrac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B^C) = \dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{15}$

25) [정답] ⑤ (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 원순열을 이해하고 그 순열의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

2, 4, 6, 8 이 적힌 카드가 서로 이웃하지 않아야 하므로

2, 4, 6, 8 이 적힌 카드를 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는 $(4-1)! = 6$ 이다.

또한, 3 과 9 는 6 과 이웃하지 않아야 하므로 3 과 9 를 배열하는 경우의 수는 2 이다.

남은 자리에 5 와 7 을 배열하는 경우의 수는 2 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 \times 2 = 24$ 이다.

26) [정답] ② (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해할 수 있는가?

[해설]

이 과수원에서 수확된 사과, 배 1개의 무게를 각각 확률변수 X, Y 라 하면 X, Y 는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(300, 5^2)$, $\mathrm{N}(m, 10^2)$ 을 따른다.

$Z_1 = \dfrac{X-300}{5}$, $Z_2 = \dfrac{Y-m}{10}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_1, Z_2 는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$ 을 따른다.

$$\mathrm{P}(290 \le X \le 305) = \mathrm{P}\left(\frac{290-300}{5} \le Z_1 \le \frac{305-300}{5}\right) = \mathrm{P}(-2 \le Z_1 \le 1)$$

$\mathrm{P}(580 \le Y \le 610) = \mathrm{P}\left(\dfrac{580-m}{10} \le Z_2 \le \dfrac{610-m}{10}\right)$ 에서

두 확률변수 Z_1, Z_2 가 모두 표준정규분포를 따르므로

$\dfrac{580-m}{10} = -2$, $\dfrac{610-m}{10} = 1$

또는 $\dfrac{580-m}{10} = -1$, $\dfrac{610-m}{10} = 2$ 이어야 한다.

따라서, $m = 600$ 또는 $m = 590$ 이므로 가능한 모든 실수 m 의 값의 합은 1190 이다.

27) [정답] ③ (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

시행을 세 번 반복한 후 점의 좌표가 두 자릿수 자연수일 확률은 1 에서 점의 좌표가 음수, 0, 세 자릿수 자연수일 확률을 모두 합하여 뺀 것과 같다.

ⅰ) 시행을 세 번 반복한 후 좌표가 음수 또는 0 일 때

첫 번째 시행에서 나온 눈의 수가 1 또는 6 이면 점 P 의 좌표는 0 이 되고, 따라서 두 번째, 세 번째 시행에서 어떠한 눈의 수가 나와도 좌표는 양수가 될 수 없다. 이때의 확률은 $\dfrac{2}{6}$ 이다.

또한, 첫 번째 시행에서 나온 눈의 수가 2 이고, 두 번째, 세 번째 시행에서 모두 1 또는 6 의 눈이 나오는 경우 역시 시행을 세 번 반복한 후 점 P 의 좌표가 0 이다. 이때의 확률은 $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{6}$ 이다.

따라서, 시행을 세 번 반복한 후 점 P 의 좌표가 음수 또는 0 일 확률은 $\dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{76}{216}$ 이다.

ⅱ) 시행을 세 번 반복한 후 좌표가 세 자릿수 자연수일 때

세 번 시행에서 좌표가 세 자릿수가 되는 경우는 4 가 적힌 눈이 한 번, 5 가 적힌 눈이 두 번 나오는 경우와 5 가 적힌 눈이 세 번 나오는 경우이다.

4 가 적힌 눈이 한 번, 5 가 적힌 눈이 두 번 나오는 확률은 $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times 3 = \dfrac{3}{216}$ 이다.

5가 적힌 눈이 세 번 나오는 확률은

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ 이다.

따라서, 시행을 세 번 반복한 후 점 P의 좌표가 세 자릿수 자연수일 확률은

$\frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{4}{216}$ 이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 구하고자 하는 확률은

$1 - \frac{76+4}{216} = \frac{136}{216} = \frac{17}{27}$ 이다.

28) [정답] ① (출제자 : 23 정현우)

[출제의도] 주어진 함수의 성질을 파악하고 함수를 정확하게 표현할 수 있는가?

[해설]

$f(a)f(b) = 4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)이 존재하지 않으므로

치역에 1, 4가 모두 포함되지 않고

치역의 2에 대응하는 정의역의 원소가 2개 미만이어야 한다.

ⅰ) $f(5) = 1$인 경우: 치역에 4가 포함되지 않는다.

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$를 만족시키는 함수는

${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35$가지, 이 중에서 치역의 2에 대응하는 정의역의 원소가 2개 이상인 함수는 ${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$이다.

따라서, 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $35 - 10 = 25$개이다.

$f(5) = 4$인 경우에는 치역에 1이 포함되지 않고,

ⅰ)과 같이 조건을 만족시키는 함수가 25개 존재한다.

ⅱ) $f(5) = 2$인 경우: $f(1) \ne 2$, $f(2) \ne 2$, $f(3) \ne 2$, $f(4) \ne 2$이다.

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$를 만족시키는 함수는

${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35$가지, 이 중에서 치역에 1, 4가 모두 포함된 함수는

${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$이다.

따라서, 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $35 - 10 = 25$개이다.

ⅲ) $f(5) = 3$인 경우:

치역에 1이 포함되고 4는 포함되지 않은 함수는

${}_4\mathrm{H}_3 - {}_4\mathrm{H}_1 = 20 - 4 = 16$가지.

치역에 4가 포함되고 1은 포함되지 않은 함수는

${}_4\mathrm{H}_3 - {}_4\mathrm{H}_1 = 20 - 4 = 16$가지.

치역에 1, 4가 모두 포함되지 않은 함수는 ${}_3\mathrm{H}_4 - {}_3\mathrm{H}_2 = 15 - 6 = 9$가지.

따라서, 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $16 + 16 + 9 = 41$개이다.

$f(5) = 5$인 경우에도 ⅲ)과 같이 조건을 만족시키는 함수가 41개 존재한다.

따라서, 조건을 모두 만족시키는 함수는

$25 + 25 + 25 + 41 + 41 = 157$개이다.

29) [정답] 36 (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 이산확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

[해설]

이산확률변수의 성질에 의하여 $a + b + \frac{1}{12} = 1$이므로 $a + b = \frac{11}{12}$이다.

$E\left((Y_k)^2\right)$

$= (1-k)^2 \times a + (4-k)^2 \times b + (10-k)^2 \times \frac{1}{12}$

$= \left(a + b + \frac{1}{12}\right)k^2 - 2\left(a + 4b + \frac{5}{6}\right)k + a + 16b + \frac{25}{3}$

에서 $a + b + \frac{1}{12} = 1$이므로

$E\left((Y_k)^2\right) = k^2 - 2\left(3b + \frac{7}{4}\right)k + 15b + \frac{37}{4}$ 이다.

모든 실수 p에 대하여 $E\left((Y_4)^2\right) \le E\left((Y_p)^2\right)$이므로

$E\left((Y_k)^2\right)$는 $k = 4$에서 최솟값을 가진다.

$k = 3b + \frac{7}{4}$에서 최솟값을 가지므로 $3b + \frac{7}{4} = 4$, $b = \frac{3}{4}$이다.

따라서, $a = \frac{1}{6}$이다.

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	4	10	합계
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$	1

$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{3}{4} + 10 \times \frac{1}{12} = 4$,

$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{3}{4} + 100 \times \frac{1}{12} = \frac{41}{2}$ 이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{9}{2}$ 이다.

또한, $V(Y_4) = V(X-4) = V(X)$이므로

$V(3X) - V(Y_4) = 9V(X) - V(X) = 8V(X) = 36$이다.

30) [정답] 222 (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 조건부 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

ⅰ) 시행을 멈추었을 때의 n의 값이 1인 경우

$P_1 = \sqrt{a_1}$이 자연수가 되어야 하므로

$a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 4$이다.

공에 적힌 수가 1 또는 4가 나올 확률은 $\frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$ 이다.

ⅱ) 시행을 멈추었을 때의 n의 값이 2인 경우

$a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 4$이면 시행을 멈추었을 때의 n의 값이 1이 되므로

a_1은 1, 4를 제외한 수이고, $P_2 = \sqrt{a_1 \times a_2}$가 자연수가 되려면

$a_2 = a_1$이어야 한다.

1과 4를 제외한 같은 공에 적힌 수가 2번 연속 나오는 경우이므로 확률은

$\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times 5 = \frac{5}{49}$ 이다.

iii) 시행을 멈추었을 때의 n 의 값이 3 인 경우
$P_3 = \sqrt{a_1 \times a_2 \times a_3}$ 가 자연수이고 $P_1 = \sqrt{a_1}$ 과 $P_2 = \sqrt{a_1 \times a_2}$ 가 자연수가 되지 않기 위해선 다음 두 경우를 고려할 수 있다.

iii-1) a_1, a_2, a_3 중 같은 숫자가 두 번 나오는 경우
1, 4 가 아닌 자연수 k 에 대하여 $a_1 = k$ 라 할 때, $a_2 = 1$ 또는 $a_2 = 4$ 이고 $a_3 = k$ 이면 조건을 만족시킨다.
이때의 확률은 $\frac{1}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{7} \times 5 = \frac{10}{343}$ 이다.

iii-2) a_1, a_2, a_3 모두 다른 숫자가 나오는 경우
모두 다른 숫자가 나오는 경우는 6, 3, 2 가 순서에 상관없이 나와야 하고, 2, 3, 6 의 순서와 관계없이 $\sqrt{a_1}$ 과 $\sqrt{a_1 \times a_2}$ 가 제곱수가 되지 않으므로 구하는 확률은 $\frac{3!}{7^3} = \frac{6}{343}$

또한, 제곱수가 홀수일 확률은 i)에서는 공에 적힌 수가 1 인 경우이므로 확률은 $\frac{1}{7}$ 이다. ii)에서는 3, 5, 7 이 각각 연속하여 나오는 경우이므로 $\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times 3 = \frac{3}{49}$ 이다. iii)에서는 나오는 숫자의 순서쌍이 $(3, 1, 3)$, $(5, 1, 5)$, $(7, 1, 7)$ 의 경우밖에 없으므로 구하는 확률은 $\frac{3}{343}$ 이다.

구하는 조건부 확률은
$$\frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{49} + \frac{3}{343}}{\frac{2}{7} + \frac{5}{49} + \frac{10}{343} + \frac{6}{343}} = \frac{49+21+3}{98+35+10+6} = \frac{73}{149} \text{ 이다.}$$
$p = 149$, $q = 73$ 이므로 $p + q = 222$ 이다.

수학 영역(미적분) 해설지

정답 및 해설

23) [정답] ② (출제자 : 23 강태후)

[출제의도] 삼각함수의 극한을 이해할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos 2x-1}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{4x}+\frac{\cos 2x-1}{4x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4}\times\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos 2x-1}{4x}\times\frac{\cos 2x+1}{\cos 2x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4}\times\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos^2 2x-1}{4x}\times\frac{1}{\cos 2x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4}\times\frac{\sin x}{x}+\frac{-\sin^2 2x}{4x}\times\frac{1}{\cos 2x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4}\times\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2x}{2}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{1}{\cos 2x+1}\right)$$
$$=\frac{2}{4}\times 1-0\times 1\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

24) [정답] ④ (출제자 : 23 채상진)

[출제의도] 음함수를 미분할 수 있는가?

[해설]

곡선 $x^2-y^3+2xy-4=0$ 에 $x=2$, $y=a$ 를 대입하면

$-a^3+2a=0$ 에서 $a=0$ 또는 $a=\pm 2$ 이다.

이때, 점 $(2,\ a)$ 는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$, $a=2$ 이다.

양변을 x 에 대하여 미분하면

$2x-3y^2\dfrac{dy}{dx}+2y+2x\dfrac{dy}{dx}=0$ 에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+2y}{3y^2-2x}$ 이고,

따라서 $x=2$, $y=2$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx}=1$ 이다.

25) [정답] ④ (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 정적분과 급수의 관계를 이용할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\ln\left(3+\frac{6}{n}k\right)^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\ln\left(3+\frac{6}{n}k\right)+1\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\int_3^9(\ln x+1)dx$$
$$=\frac{1}{6}\left[x\ln x-x+x\right]_3^9$$
$$=\frac{5}{2}\ln 3$$

26) [정답] ⑤ (출제자 : 23 정현우)

[출제의도] 수열의 극한을 적용할 수 있는가?

[해설]

첫 번째 조건에서 분모, 분자를 모두 a^{2n} 으로 나누면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{b^n}{a^{2n}}\right)}{1+\left(\frac{b^{4n}}{a^{2n}}\right)}=\frac{a}{2}$ 이고,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^{4n}}{a^{2n}}\right)$ 이 발산하는 경우 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{b^n}{a^{2n}}\right)}{1+\left(\frac{b^{4n}}{a^{2n}}\right)}=0$,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^{4n}}{a^{2n}}\right)=0$ 으로 수렴하는 경우 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{b^n}{a^{2n}}\right)}{1+\left(\frac{b^{4n}}{a^{2n}}\right)}=a$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^{4n}}{a^{2n}}\right)=1$, $a=b^2$ 임을 구할 수 있다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}+a^n}{3^n-a^n}=-2$ 에서

$3^2>a$ 이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}+a^n}{3^n-a^n}$ 는 무한대로 발산하고,

$a>3^2$ 이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}+a^n}{3^n-a^n}=-1$ 이므로

$a=3^2=9$ 이다.

따라서, $b=3$ 이다. 그러므로, $a-b=6$ 이다.

27) [정답] ① (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력을 구할 수 있는가?

[해설]

점 Q 의 시각 $t\ (t>0)$ 에서의 위치를 $(x,\ y)$ 라 하고

점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

삼각형 OPQ 의 넓이는 1 이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{QH}}=1$

$\dfrac{1}{2}\times|2t|\times|y|=1$ 이다.

$|y|=\dfrac{1}{t}$ 에서 $y=2-\left(e^x+e^{-x}\right)\le 2-2\sqrt{e^{x-x}}=0$ 이므로

$y=-\dfrac{1}{t}$ 이고 $2-e^x-e^{-x}=-\dfrac{1}{t}$ 이다. … ㉠

㉠에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$\left(-e^{x}+e^{-x}\right)\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t^2\left(e^{-x}-e^{x}\right)}$ 이고

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t^2}$ 이다.

$t=\dfrac{1}{2}$ 를 $2-e^{x}-e^{-x}=-\dfrac{1}{t}$ 에 대입하면

$e^{x}+e^{-x}=4$ 이다.

위 식에 양변에 e^{x} 를 곱하면

$e^{2x}-4e^{x}+1=0$

$\left(e^{x}-2\right)^2=3$

$e^{x}=2+\sqrt{3}\ (\because x>0)$ 이다.

$t=\dfrac{1}{2}$ 일 때

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{4}{e^{-x}-e^{x}}\\&=\frac{4}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\left(2+\sqrt{3}\right)}\\&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t^2}=4$

이므로 $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+4^2}$

$$=\frac{\sqrt{156}}{3}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$$

따라서 $t=\dfrac{1}{2}$ 일 때 점 Q 의 속력은 $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$ 이다.

28) [정답] ③ (출제자 : 23 채상진)

[출제의도] 미분가능성을 파악할 수 있는가?

[해설]

$h(x)$ 는 미분가능하므로 $e^{k-1}=f(k)$, $e^{k-1}=f'(k)$ 이다.

$k-1=\ln f'(k)$ 이므로 $f(k)\ln f'(k)=(k-1)e^{k-1}=0$ 이다.

$e^{k-1}>0$ 이므로 $k=1$ 이다.

따라서 $f(1)=1$, $f'(1)=1$ 이어야 한다.

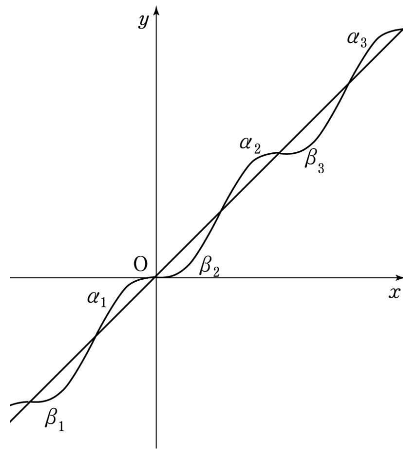
(나)에서 $f(x)$ 는 $-\sin x+x$ 를 x 축으로 $+a$ 만큼, y 축으로 $+b$ 만큼 평행이동한 함수이다.

$g(x)=-\sin x+x$ 라 하자.

$g'(x)=-\cos x+1$ 이고, $x=2n\pi$ (n 은 정수)에서 $g'(x)=0$ 이다.

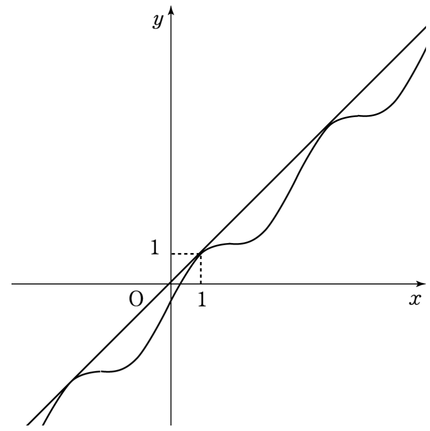
$x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$ 에서 $g'(x)=1$ 이다. $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

$g'(x)=1$ 인 x 좌표를 $x=\alpha_n$, $x=\beta_n$ 이라 한다면 해당하는 점들을 x 축의 방향으로 $+a$ 만큼, y 축의 방향으로 $+b$ 만큼 평행이동시키면 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하다.



$h(x)$ 는 α_n (n 은 정수)과 β_n (n 은 정수)에 따라 그래프가 다음과 같이 그려진다.

i) $x=\alpha_n$ 일 때



(초록색은 그냥 저거 대입하면 저 그래프 나옴.. 일러스트 할때는 그냥 그래프만 작성해줘)

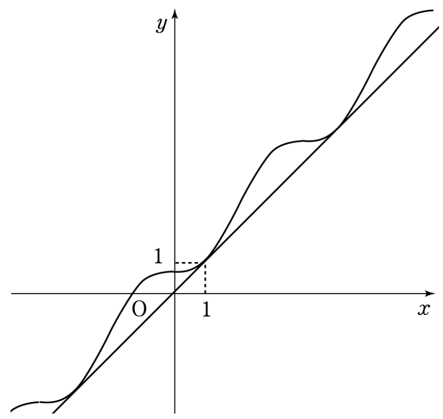
$x=\alpha_n$ 에 해당하는 점들을 x 축의 방향으로 $+a$ 만큼, y 축의 방향으로 $+b$ 만큼 평행이동시키면 $(1, 1)$이 되어야 한다.

$x=\dfrac{4n-1}{2}\pi$, $y=1+\dfrac{4n-1}{2}\pi$ 이므로

$a=1-\dfrac{4n-1}{2}\pi$,

$b=1-\left(1+\dfrac{4n-1}{2}\pi\right)=-\dfrac{4n-1}{2}\pi$ 이다.

ii) $x=\beta_n$ 일 때



$x=\beta_n$ 에 해당하는 점들을 x 축의 방향으로 $+a$ 만큼, y 축의 방향으로 $+b$ 만큼 평행이동시키면 $(1, 1)$이 되어야 한다.

$x=\dfrac{4n-3}{2}\pi$, $y=-1+\dfrac{4n-3}{2}\pi$ 이므로

$a=1-\dfrac{4n-3}{2}\pi$,

$b=1-\left(-1+\dfrac{4n-3}{2}\pi\right)=2-\dfrac{4n-3}{2}\pi$ 이다.

$\int_{a+\frac{\pi}{2}}^{b+\frac{\pi}{2}} h'(x)\,dx = h\left(b+\frac{\pi}{2}\right) - h\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$ 이다.
그래프 i)과 그래프 ii) 모두 a, b가 2π씩 차이나므로
$h\left(b+\frac{\pi}{2}\right) - h\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$는 두 케이스 모두 동일한 값을 가진다. 따라서 a, b를 계산하기 쉽게 둘 수 있다.

i)에서 $a = 1+\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$라 하자.
$h(x) = -\sin\left(x-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)+x-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$ $(x \ge 1)$ 이다.
$h(\pi) = -\cos(-1)+\pi-1$, $h(\pi+1) = -1+\pi$ 이고,
$\left|\int_{\pi+1}^{\pi} h'(x)dx\right| = |h(\pi)-h(\pi+1)| = \cos(-1)$ 이다.

ii)에서 $a = 1-\frac{\pi}{2}$, $b = 2-\frac{\pi}{2}$라 하자.
$h(x) = -\sin\left(x-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right)+x-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+2-\frac{\pi}{2}$ $(x \ge 1)$ 이다.
$h(2) = -\sin\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+3$, $h(1) = 1$ 이므로
$\left|\int_{1}^{2} h'(x)dx\right| = |h(2)-h(1)| = -\cos(1)+2$ 이다

$\cos x$는 우함수이므로 $\cos(-1) = \cos 1$ 이고, $\cos x \le 1$ 이다.
$-\cos(1)+2-\cos(-1) = 2-\cos(1) > 0$ 이므로
최솟값은 $\cos(-1) = \cos(1)$ 이다.

29) [정답] 2 (출제자 : 22 이수훈)
[출제의도] 치환적분을 할 수 있는가?

[해설]
양변에 $\frac{\sec^2 x}{\pi}$ 를 곱하면
$\sec^2 x\, f(\tan x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\pi}f\left(\frac{x}{\pi}\right)$

양변을 0에서부터 $\frac{\pi}{4}$ 까지 적분하면
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, f(\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\pi}f\left(\frac{x}{\pi}\right)dx$$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, f(\tan x)dx$ 에서 $\tan x = t$ 로 놓으면
$\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=1$ 이므로
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, f(\tan x)dx = \int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ 에서 $\cos x = s$ 로 놓으면
$\frac{ds}{dx} = -\sin x$ 이고, $x=0$ 일 때 $s=1$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $s=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-1}{s^2}ds = \left[\frac{1}{s}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\pi}f\left(\frac{x}{\pi}\right)dx$ 에서 $\frac{x}{\pi} = r$ 로 놓으면
$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{\pi}$ 이고, $x=0$ 일 때 $r=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $r=\frac{1}{4}$ 이므로
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\pi}f\left(\frac{x}{\pi}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} f(r)dr$$

따라서
$$\int_0^1 f(t)dt = \sqrt{2}-1+\int_0^{\frac{1}{4}} f(r)dr$$
$$\int_0^1 f(x)dx = \sqrt{2}-1+\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)dx$$
$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^{\frac{1}{4}} f(x)dx = \sqrt{2}-1$$
$$\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)dx = \sqrt{2}-1$$
그러므로 $(k+1)^2 = \sqrt{2^2} = 2$ 이다.

30) [정답] 594 (출제자 : 23 하종수)
[출제의도] 급수의 성질을 통해 조건에 맞는 수열을 구할 수 있는가?

[해설]
$\{a_n\}$의 공비를 r, $\{b_n\}$의 공비를 r'라고 하자.

$\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = 3$ 에서 $r' = \frac{1}{3}$ 또는 $r' = -\frac{1}{3}$ 이다.
(나)에서 $rr' > 0$ 이므로 $r > 0$, $r' = \frac{1}{3}$ 또는 $r < 0$, $r' = -\frac{1}{3}$ 이다.

(나)에서 $r \ne 0$ 이므로 r은 0이 아닌 정수다.
따라서 $0 > r' > r$ 또는 $r > r' > 0$ 이다.

i) $0 > r' > r$ 일 때
$a_1 = \frac{1}{r}$, $b_1 = \frac{1}{r'} = -3$ 에서 $a_1 > b_1$ 이므로 $c_1 = a_1 b_1 = -\frac{3}{r}$
$a_2 \le b_2$ 이므로 $c_2 = \frac{b_2}{a_2} = 1$
$a_{2n+1} = r^{2n-1} \times a_2 = r(r^2)^{n-1}$,
$b_{2n+1} = (r')^{2n-1} \times b_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ 에서
$a_{2n+1} \le b_{2n+1}$ 이므로 $c_{2n+1} = \frac{b_{2n+1}}{a_{2n+1}} = -\frac{1}{3r}\left(\frac{1}{9r^2}\right)^{n-1}$
$a_{2n+2} = r^{2n} \times a_2 = (r^2)^n$, $b_{2n+2} = (r')^{2n} \times b_2 = \left(\frac{1}{9}\right)^n$ 에서
$a_{2n+2} > b_{2n+2}$ 이므로 $c_{2n+2} = a_{2n+2}b_{2n+2} = \left(\frac{r^2}{9}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+2}$$
$$= -\frac{3}{r}+1-\frac{1}{3r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9r^2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^2}{9}\right)^n \text{ 이므로}$$
급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 이 수렴하려면 $\left|\frac{r^2}{9}\right| < 1$ 이고 $\left|\frac{1}{9r^2}\right| < 1$ 이다.

따라서 $r = -1$ 또는 $r = -2$ 이고
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\frac{3}{r}+1-\frac{1}{3r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9r^2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^2}{9}\right)^n$$

$$= -\frac{3}{r}+1-\frac{1}{3r}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9r^2}}+\frac{\frac{r^2}{9}}{1-\frac{r^2}{9}}$$ 이므로

가능한 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 의 값은 $\frac{9}{2}$ 와 $\frac{243}{70}$ 이다.

ii) $r>r'>0$ 일 때

$a_1=\frac{1}{r}$, $b_1=\frac{1}{r'}=3$ 에서 $a_1 \le b_1$ 이므로 $c_1=\frac{b_1}{a_1}=3r$

$a_2 \le b_2$ 이므로 $c_2=\frac{b_2}{a_2}=1$

$a_{n+2}=r^n\times a_2=r^n$, $b_{n+2}=(r')^n\times b_2=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 에서

$a_{n+2}>b_{n+2}$ 이므로 $c_{n+2}=a_{n+2}b_{n+2}=\left(\frac{r}{3}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1+c_2+\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+2}$$

$$=3r+1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n$$ 이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 이 수렴하려면 $\left|\frac{r}{3}\right|<1$ 이다.

따라서 $r=1$ 또는 $r=2$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3r+1+\frac{\frac{r}{3}}{1-\frac{r}{3}}$$ 이므로

가능한 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 의 값은 $\frac{9}{2}$ 와 9 이다.

i)과 ii)에 의하여 가능한 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 의 값은 $\frac{9}{2}$, $\frac{243}{70}$, 9 이므로

$k=\frac{9}{2}+\frac{243}{70}+9=\frac{594}{35}$ 이고 $35k=594$ 이다.

수학 영역(기하) 해설지

정답 및 해설

23) [정답] ③ (출제자 : 23 임하준)

[출제의도] 좌표공간에서 두 점을 외분하는 점을 구할 수 있는가?

[해설] $\mathrm{A}(a,\,-5,\,4)$, $\mathrm{B}(1,\,-3,\,2)$를 $5:3$으로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{5-3a}{2},\ \dfrac{-15+15}{2},\ \dfrac{10-12}{2}\right)$이다.
$\dfrac{5-3a}{2}=4$, $\dfrac{10-12}{2}=b$이므로
$a=-1$, $b=-1$
따라서, $a+b=-2$

24) [정답] ② (출제자 : 23 임하준)

[출제의도] 벡터의 실수배를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 이므로 A, B, C는 한 직선 위의 점이다.
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=(k+3)+4k=5k+3$이고
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $k>1$에서
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=k(k+3)=k^2+3k$이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5k+3=k^2+3k$이다.
따라서 $k=3$이다.

25) [정답] ④ (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 주축의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$은 중심이 원점이므로 초점 F가 x축 위에 존재한다. 초점 F의 좌표를 $(c,\,0)$이라 하면 이 점은 직선 $y=m(x-3)$ 위에 있으므로 $0=m(c-3)$이고, $m\neq0$이므로 $c=3$이다.

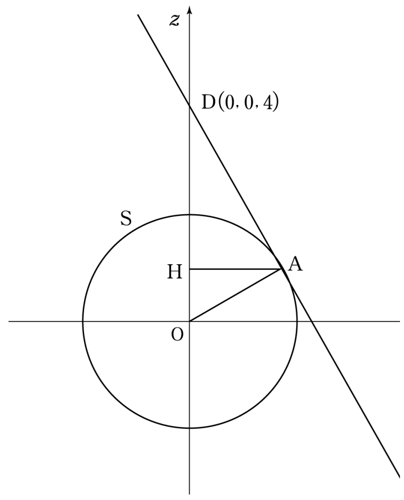
쌍곡선의 성질에 의해 $a^2+3=3^2$이므로 $a^2=6$이고,
쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다.

쌍곡선의 두 초점 F, F′으로부터 쌍곡선 위의 점 A까지의 길이의 차는 주축의 길이인 $2\sqrt{6}$ 과 같다.
따라서 $|\overline{\mathrm{AF}}-\overline{\mathrm{AF'}}|=2\sqrt{6}$ 이다.

26) [정답] ⑤ (출제자 : 23 강주연)

[출제의도] 좌표공간에서 구와 평면의 접점을 구하고 정사영의 최댓값을 구할 수 있는가?

[해설]
구 S와 점 A에서 접하는 평면을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 D를 $\mathrm{D}(0,\,0,\,4)$라 하면,
삼각형 OAD는 $\overline{\mathrm{OD}}=4$, $\overline{\mathrm{OA}}=2$이고 $\angle\mathrm{OAD}=90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\angle\mathrm{ODA}=30^\circ$ 이다.

점 A에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면,
삼각형 OAD와 삼각형 OHA에서 각 AOH가 공통이므로
삼각형 OAD와 삼각형 OHA는 RHA 닮음이고
그 닮음비는 $\overline{\mathrm{OD}}:\overline{\mathrm{OA}}=2:1$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=1$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$이고, 점 A는 구 S의 xy평면과 평행한 단면 중 반지름이 $\sqrt{3}$이고 원점으로부터 z축의 양의 방향으로 1만큼 떨어진 단면 위의 점이다.

선분 $\overline{\mathrm{BC}}$를 밑면으로 하는 삼각형 ABC의 높이는 점 A에서 x축까지의 거리와 같다. x좌표가 일정한 점 A 중 y좌표의 절댓값이 최대인 점의 좌표는 $(0,\,\sqrt{3},\,1)$ 또는 $(0,\,-\sqrt{3},\,1)$이고, 이때의 삼각형 ABC의 높이는 2이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times2=\overline{\mathrm{BC}}=4$이다.

27) [정답] ① (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 벡터를 이용한 직선과 원의 방정식을 이해하고 있는가?

[해설]

$t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 에서 양변에 $\dfrac{1}{t}$ 를 곱하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(1-\dfrac{1}{t}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 이다.

$\dfrac{1}{t}=k$ 라 하면 $0<k<1$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 이므로

점 P 는 선분 BC 를 $(1-k):k$ 로 내분하는 점이다.

선분 AB 의 중점을 M 이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\overrightarrow{\mathrm{BM}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|=2$ 이므로

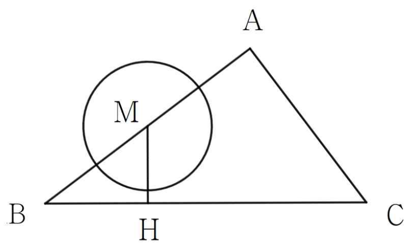
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{QM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right)\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{QM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{QM}}\right)\\&=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2\\&=4-|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2=3\end{aligned}$$

이다. 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|=1$ 이므로 점 Q 는 점 M 을 중심으로 하고 반지름이 1 인 원 위의 점이다.

점 M 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{\mathrm{MH}}=2\sin(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{6}{5}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ 의 최솟값은 $\dfrac{6}{5}-1=\dfrac{1}{5}$ 이다.



[별해1]

$t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$t\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$t\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$t>1$ 이므로 점 P 는 선분 BC 위의 점이다.

[별해2]

점 A, B, C 의 좌표를 각각 $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,3)$ 이라 하고

점 Q 의 좌표를 (x,y) 라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}=(-x,-y)$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=(x-4,y)$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=-x^2+4x-y^2=3$ 이다.

따라서 $(x-2)^2+y^2=1$ 이므로

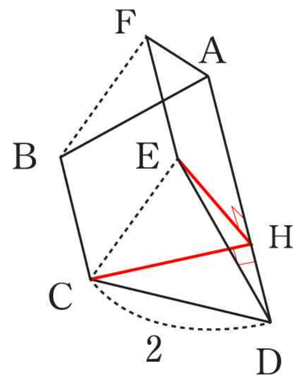
점 Q 는 $(2,0)$ 을 중심으로 하고 반지름이 1 인 원 위의 점이다.

28) [정답] ② (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

점 C 에서 선분 AD 에 내린 수선의 발과 점 E 에서 선분 AD 에 내린 수선의 발은 같은 위치에 있고 그 점을 H 라 하자.



$\overline{\mathrm{CH}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{EH}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$ 이므로

($\overline{\mathrm{AD}}\perp$ 평면 CEH) 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{CE}}$ 이고, $\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{CE}}$ 이다.

같은 방식으로 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{BF}}$ 이므로 사각형 BCEF 는 직사각형이다.

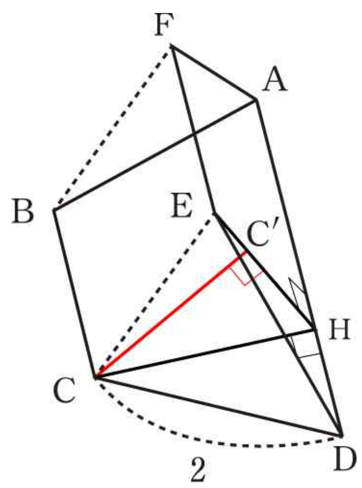
직사각형 BCEF 의 넓이를 구하면

$\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BF}}=2\times\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ 이다.

점 C 에서 직선 EH 에 내린 수선의 발을 C′ 이라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{C'H}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{CC'}}\perp\overline{\mathrm{C'H}}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해

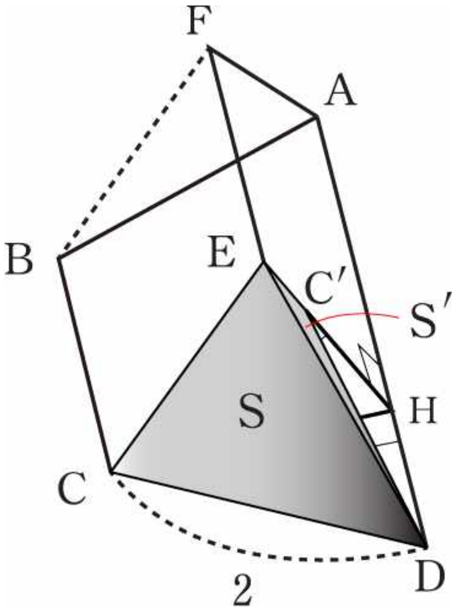
($\overline{\mathrm{CC'}}\perp$ 평면 ADEF) 이다.



평면 ADEF 와 평면 CDE 사이의 이면각의 크기를 θ 라 하고,

삼각형 CDE 의 넓이를 S, 삼각형 C′DE 의 넓이를 S' 라 하면

$\cos\theta=\dfrac{S'}{S}$ 이다.



삼각형 CDE는 $\overline{CD}=\overline{DE}=2$인 이등변삼각형이므로 선분 CE의 중점을 M이라 하면 $\overline{CM}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$이고,

$\overline{DM}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\sqrt{5}\times\frac{4}{5}\sqrt{5}=\frac{8}{5}$이다.

$\angle CDA=\angle EDA=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{CH}=\overline{EH}=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이고

삼각형 CEH에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle CEH)=\dfrac{\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\frac{4}{5}\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{15}\sqrt{15}$이므로

$\overline{C'E}=\overline{CE}\cos(\angle CEH)=\frac{8}{15}\sqrt{3}$이다.

따라서 $S'=\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}\sqrt{3}\times2\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{15}\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\frac{4}{15}\sqrt{3}}{\frac{8}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

사각형 ABCD는 평행사변형이므로 사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$이다.

그러므로 구하고자 하는 정사영의 넓이는 $3\sqrt{3}\cos\theta=\frac{3}{2}$이다.

[별해] $\cos\theta$를 구하는 다른 방법

점 A에서 직선 DE에 내린 수선의 발은 E이고, $\overline{AE}=2\sqrt{3}$이다.

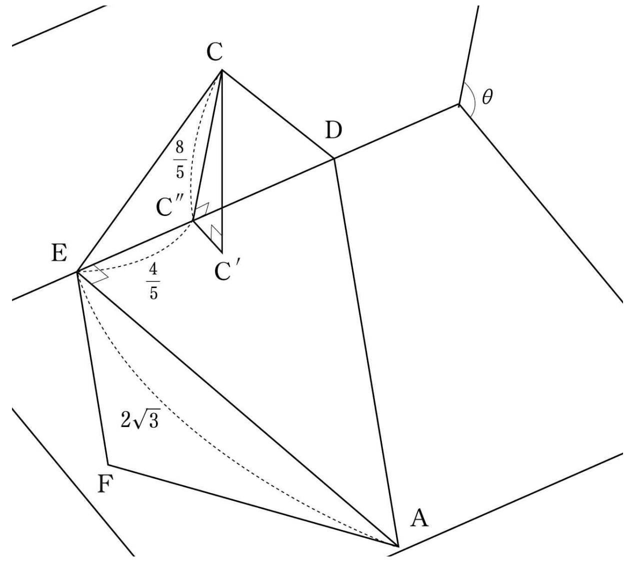
점 C에서 평면 ADEF에 내린 수선의 발을 C′, 직선 DE에 내린 수선의 발을 C″라 하자.

삼각형 CDE는 이등변삼각형이므로 $\cos(\angle CED)=\frac{\sqrt{5}}{5}$이고,

$\sin(\angle CED)=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$이다.

$\overline{EC''}=\overline{CE}\cos(\angle CED)=\frac{4}{5}$, $\overline{CC''}=\overline{CE}\sin(\angle CED)=\frac{8}{5}$이므로

그림과 같다.



평면 ADEF와 평면 CDE 사이의 이면각의 크기를 θ라 하면

$\overline{AC}=2\sqrt{3}$, $\overline{CC'}=\frac{8}{5}\sin\theta$,

$\overline{AC'}=\sqrt{\overline{EC''}^2+(\overline{AE}-\overline{C'C''})^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\frac{8}{5}\cos\theta\right)^2}$ 이므로

$\overline{AC}^2=\overline{AC'}^2+\overline{CC'}^2$에서

$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{8}{5}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\frac{8}{5}\cos\theta\right)^2$

$12=\frac{64}{25}\sin^2\theta+\frac{16}{25}+12-\frac{32}{5}\sqrt{3}\cos\theta+\frac{64}{25}\cos^2\theta$

$\frac{32}{5}\sqrt{3}\cos\theta=\frac{64}{25}+\frac{16}{25}=\frac{16}{5}$

따라서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

[별해]

점 A에서 선분 BF에 내린 수선의 발을 H, 점 D에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 H′라 하면, 도형이 평면 AHH′D에 대하여 대칭이므로 평면 ADEF와 평면 CDE가 이루는 이면각의 크기는 평면 ABCD와 평면 CDE가 이루는 이면각의 크기와 같다.

29) [정답] 1 (출제자 : 23 강주연)

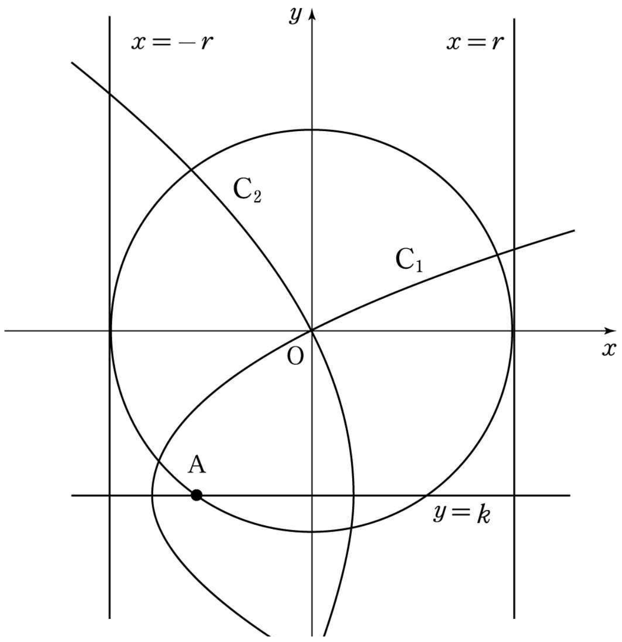
[출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 포물선의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

포물선 위의 한 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같으므로, 포물선 C_1과 C_2의 준선은 모두 원에 접한다.

따라서 포물선 C_1의 준선은 $x=-r$이고 포물선 C_2의 준선은 $x=r$이다.

포물선 C_1과 C_2와 각각의 준선을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 A 의 좌표를 $(-a,\ k)\ (a>0)$라고 하면
점 A 가 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 $a^2+k^2=r^2$ 이다.

포물선 C_1 의 초점에서 준선까지의 거리는 $r-a$ 이고
포물선 C_1 의 식은 $(y-k)^2=4\left(\frac{r-a}{2}\right)\left(x+\frac{r+a}{2}\right)$ 이다.
포물선 C_2 의 초점에서 준선까지의 거리는 $r+a$ 이므로
포물선 C_2 의 식은 $(y-k)^2=-4\left(\frac{r+a}{2}\right)\left(x-\frac{r-a}{2}\right)$ 이다.

포물선 C_1 의 점 O 에서의 접선의 기울기는
포물선 C_1 을 x 축으로 $\frac{r+a}{2}$ 만큼, y 축으로 $-k$ 만큼 평행이동한
포물선의 점 $\left(\frac{r+a}{2},\ -k\right)$ 에서의 접선의 기울기와 같다.
따라서 $m_1=-\frac{r-a}{k}$ 이다.

포물선 C_2 의 점 O 에서의 접선의 기울기는
포물선 C_2 을 x 축으로 $\frac{r-a}{2}$ 만큼, y 축으로 $-k$ 만큼 평행이동한
포물선의 점 $\left(\frac{r-a}{2},\ -k\right)$ 에서의 접선의 기울기와 같다.
따라서 $m_2=\frac{r+a}{k}$ 이다.

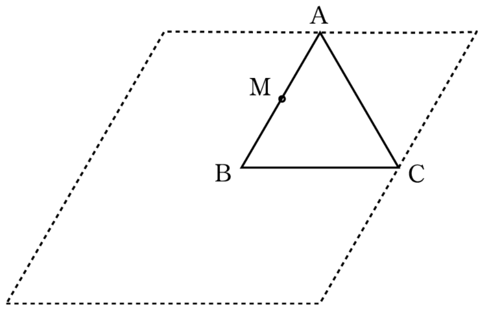
$m_1m_2=-\frac{r-a}{k}\times\frac{r+a}{k}=-\frac{r^2-a^2}{k^2}$ 이고
$a^2+k^2=r^2$ 에서 $r^2-a^2=k^2$ 이므로
$m_1m_2=-\frac{k^2}{k^2}=-1$ 이다.

따라서 $(m_1m_2)^2=(-1)^2=1$ 이다.

30) [정답] 11 (출제자 : 22 고명준)

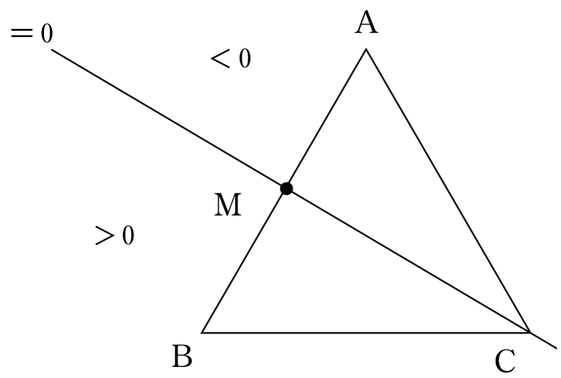
[출제의도] 조건을 만족시키는 동점에 대하여 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

[해설]
조건 (가)에 의하여 아래 그림에서 점 P 는 점선 영역 안에 존재한다.

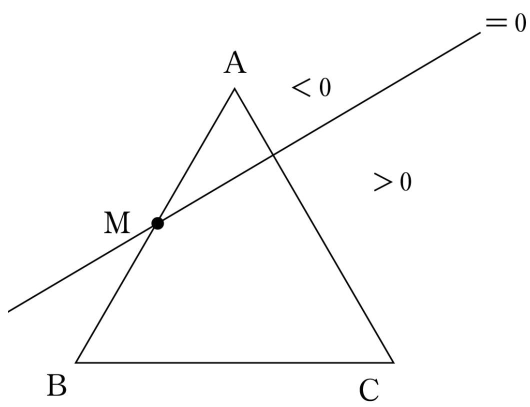


조건 (나)에서 $(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AC})\le 0$ 를 만족시키기 위해선
$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}\le 0$, $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AC}\ge 0$ 이거나
$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}\ge 0$, $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AC}\le 0$ 이어야 한다.

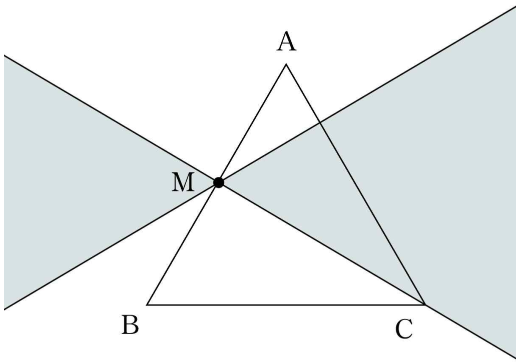
선분 AB 에 수직이고 점 M 을 지나는 직선에 대하여 영역에 따른 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 의 값은 다음과 그림과 같이 점 P 가 직선보다 위에 있으면 음수이고, 아래에 있으면 양수이고, 직선 위에 있으면 0 이다.



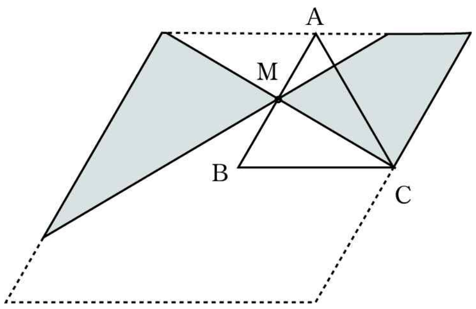
선분 AC 에 수직이고 점 M 을 지나는 직선에 대하여 영역에 따른 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AC}$ 의 값은 다음 그림과 같이 점 P 가 직선보다 위에 있으면 음수이고, 아래에 있으면 양수이고, 직선 위에 있으면 0 이다.



따라서, 점 P 가 존재할 수 있는 영역은 다음과 같다.

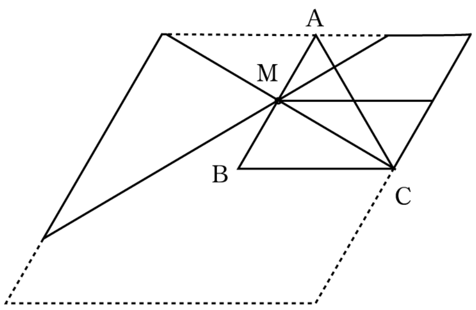


따라서, 두 조건 (가), (나)에 의하여 점 P 가 존재할 수 있는 영역은 다음과 같다.



점 P 는 실선을 포함하는 회색 영역 안에 위치한다.

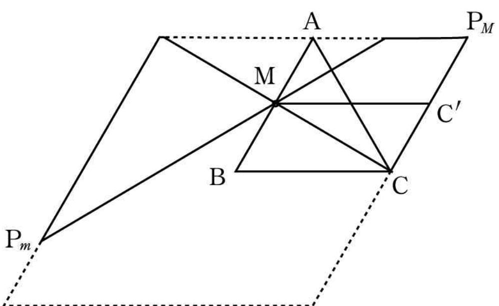
$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 에서 시점을 M 으로 통일하면 다음과 같다.



$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 를 만족시키는 점 K 를 C′ 라 하고,
점 P 에서 직선 MC′ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MC'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 가 이루는 각을 θ 라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{MC'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}} = |\overrightarrow{\mathrm{MC'}}||\overrightarrow{\mathrm{MP}}|\cos\theta = \overline{\mathrm{MC'}} \times \overline{\mathrm{MH}}$ 또는
$\overline{\mathrm{MC'}} \times (-\overline{\mathrm{MH}})$ 이다.

이때 $\overrightarrow{\mathrm{MC'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 가 최대가 되려면 $\cos\theta > 0$ 이고 $\overline{\mathrm{MH}}$ 가 최대여야 한다.
$\overrightarrow{\mathrm{MC'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 가 최소가 되려면 $\cos\theta < 0$ 이고 $\overline{\mathrm{MH}}$ 가 최대여야 한다.

$\overrightarrow{\mathrm{MC'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 가 최대와 최소가 되도록 하는 점 P 를 각각 P_M, P_m 이라 하면 P_M, P_m 은 다음 그림과 같이 위치한다.



$\overrightarrow{\mathrm{MP}_M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC'}}$
$= \overline{\mathrm{MH}} \times \overline{\mathrm{MC'}}$
$= (\overline{\mathrm{MC'}} + \overline{\mathrm{C'H}}) \times \overline{\mathrm{MC'}}$
$= (\overline{\mathrm{MC'}} + \overline{\mathrm{C'P_M}} \times \cos 60^\circ) \times \overline{\mathrm{MC'}}$
$= \left(2 + 1 \times \dfrac{1}{2}\right) \times 2 = 5$

직선 MC′ 가 점 P_m 을 지나고 선분 AB 와 평행한 직선과 만나는 점을 D 라 하면 $\angle \mathrm{DMP}_m = 30^\circ$, $\angle \mathrm{MDP}_m = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로 삼각형 DMP_m 은 $\overline{\mathrm{DM}} = \overline{\mathrm{DP}_m}$ 인 이등변삼각형이다.

$\overrightarrow{\mathrm{MC'}} = -\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{MP}_m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC'}}$
$= \overline{\mathrm{MH}} \times (-\overline{\mathrm{MD}})$
$= -(\overline{\mathrm{MD}} + \overline{\mathrm{DH}}) \times \overline{\mathrm{MD}}$
$= -(\overline{\mathrm{MD}} + \overline{\mathrm{DP}_m} \times \cos 60^\circ) \times \overline{\mathrm{MD}}$
$= -\left(2 + 2 \times \dfrac{1}{2}\right) \times 2 = -6$

그러므로 $M - m = 5 - (-6) = 11$ 이다.