규토 라이트 N제

CONTENTS

| 미분 |

| 적분 |

CONTENTS

해설편

오리엔테이션

책소개

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

---

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과 개념, 실전 개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.
단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.
교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

---

2. **T**raining – 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여
수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

---

3. **T**raining – 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.
필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.
실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

---

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.
과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도
1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야 하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

단순히 유형서가 아니라 생기초부터 점점 살을 붙여가며 기출킬러까지 다루는 올인원 교재입니다.
즉, 교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 라이트 N제 수2의 경우 총 773제이고
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당 과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야 할지 갈피를 못 잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학성적이 잘 오르지 않는 학생

검토후기

문지유 / 울산대학교 의학과

2024 규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Traning – 1Step), 단원별 역대 기출들(Training – 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.

벌써 제가 규토 N제 교재 검토를 한지도 3년차에 접어들었네요. 최대한 꼼꼼히 검토하는 편인데도 항상 놓치는 게 있을까 떨리네요. 2023년 새해가 밝아 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

김태민 / 울산대학교 의학과

안녕하세요. 울산대학교 의예과에 20학번으로 입학하여 의학과 2학년에 재학 중인 김태민입니다. 작년에 이어 올해도 검토를 맡게 되었는데요. 저의 N수 경험, 학원 조교 경험, 작년 문제집 검토 경험들을 통해 쌓아온 노하우를 바탕으로 수험생 여러분들에게 도움이 될 수 있도록 꼼꼼히 검토했습니다. 규토 라이트 N제 문제집을 검토할 때마다 가장 인상 깊은 점은 질 좋은 문제들과 난잡하지 않은 해설인 것 같아요. 현재 수능체제에 가장 적합한 문제들을 통해 여러분을 훈련시키고 해설을 통해 조심해야 하는 부분은 어디인지, 어떻게 문제를 접근해야 하는지 여러분에게 수능 수학 공부의 방향성을 제시합니다. 이 교재에 있는 문제들과 문제풀이를 반복 학습하면서 체화해 나가는 과정이 도움이 될 것이라 확신합니다. 이 책이 출판될 시점이면 본격적으로 새로운 마음으로 수험생 여러분들이 공부를 시작하는 단계일텐데요. 수능까지 충분히 많이 남았기에 너무 조급한 마음보다는 여유를 가지고 기본부터 잘 다듬어 가시길 바랍니다. 이 교재를 거쳐간 모든 수험생 여러분들에게 좋은 기운이 닿기를 항상 응원하겠습니다!

정지영 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 벌써 한 해의 입시가 끝나가고, 완연한 겨울이 되었네요. 입시가 끝나자마자 새로운 문제집이 출판되고, 풀린다는 생각을 하니 저자분의, 수험생들의 열의가 느껴지는 것만 같습니다.
규토 라이트 N제 수학2에는 교과서적 풀이와 빠른 풀이를 모두 제공하며, 필요하다면 미적분 영역의 내용까지 제공합니다. 이렇게 폭넓은 내용을 제공하면서도 너무 부담스럽지 않게 읽히는 점이 규토 라이트 N제 수학2의 가장 큰 장점이라고 생각합니다. 더도 말고 덜도 말고 규토에 나와 있는 내용만 모두 확인한다면 수능 수학을 푸는 데에는 아무런 문제도 없겠다는 생각이 듭니다. 그만큼 완성도가 좋은 문제집이라고 생각합니다.

과정은, 결과로 미화된다는 생각을 종종 합니다. 여러분의 올 한해 수험 생활은 분명 쉽지 않을거에요. 공부의 스트레스, 불안감...많은 것들이 여러분을 괴롭힐 것 같습니다. 하지만 올 한해가 끝났을 때, 그 모든 과정이 좋은 기억으로 남을 수 있을 만큼 좋은 결과를 얻을 수 있으시기를 기원합니다. 감사합니다.

조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.

기출문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 기출문제가 부족한 삼각함수의 그래프, 삼각함수의 활용 단원에서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제 만의 큰 장점이라고 생각합니다.

저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절한 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와 있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요~ 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 수능 수학 영역이 수 1, 2 공통영역과 선택영역으로 분리된 지 어느덧 2년이 지났습니다. 이전 수능과 달리 최근에는 준킬러 수준 이상의 문제들이 많아졌습니다. 어려운 문제들이 많아진 만큼 수험생들의 부담감도 당연히 커졌습니다. 즉, 긴장되는 시험장 안에서 '멘탈' 싸움이 중요해졌습니다. 이러한 '멘탈' 싸움에서 극복해내려면 컨디션 관리와 자기 페이스 유지도 중요하지만 무엇보다도 어렵고 처음 보는 문제를 보았을 때 당황하지 않고 차근차근 풀어가는 능력이 있어야 합니다. 규토 라이트 N제 시리즈는 이러한 능력을 기르게 해주는 문제집입니다. Training 1 Step에서 저자가 최신 수능 트렌드를 분석하면서 만든 자작문제들을 통해 실력을 기를 수 있고, 2 Step에서 기른 실력을 기출문제에 바로 적용할 수 있습니다. 문제의 난이도가 절대 쉽지만은 않지만, 저자의 100% 공부법을 통한 꾸준한 반복과 복습을 하면, 어느새 준킬러 수준 이상의 문제들을 술술 푸는 자신을 발견할 겁니다. 올해 수험생 여러분 모두 건승을 기원합니다!

추천사

규토 라이트 N제와 함께 1년 내내 수학 모의고사 1등급!! (김준한)

– 4등급부터 시작해서 현재 수학 백분위 99%까지 달성 후기 –

안녕하세요~ 저는 작년 고1 때는 모의고사 성적이 3, 4등급에 머물러 있다가 올해 규토 라이트 N제 수1, 2로 공부하면서 2022년에 시행된 고2 6, 9, 11월 모의고사에서 모두 1등급을 쟁취하게 되어 추천사를 작성하게 되었습니다. 제가 이 책을 처음 접했을 때 책의 구성도 물론 좋았지만 가장 눈에 들어온 것은 공부법이었습니다. 성적대가 낮은 학생들이 공부해도 큰 효과를 볼 수 있는 책이지만 평소에 수학 공부법에 회의감을 가지고 있는 학생들도 공부하면 더 큰 효과를 볼 수 있을 거라고 생각합니다!

고등학교 1학년 때의 저는 수학을 아주 잘하지도 못 하지도 않는 학생이었습니다. 단지 다다익선이라는 말처럼 시중에 나와 있는 문제집을 다 풀어 보며 성적이 잘 나오겠지하며 기대하는 학생에 불과했습니다. 그랬던 성적이 3등급이었고 저는 심각한 고민에 빠졌습니다. 그러던 도중에 한 커뮤니티 사이트에서 '규토 라이트 N제' 후기를 보았습니다. 후기를 읽어보며 나도 저런 드라마틱한 성장을 이뤄낼 수 것 같다는 느낌을 받았고 그 중심인 '100% 공부법'을 알게 되어 바로 책을 구입하게 되었습니다.

규토 라이트 N제를 보면서 구성이 참 놀라웠습니다. 현 교육과정에 따른 개념이 모두 수록되어 있을 뿐만 아니라 규토님 특유의 테크니컬한 팁들이 다 들어 있어서 자작문제 (t1)에 적용하여 체화를 시키고 이에 따라 배운 것들을 기출문제 (t2)에 또 적용할 수 있어 개념–기출의 괴리감을 최소화 시켜준다는 장점이 있습니다. 그리고 규토 라이트 N제의 고난도 문제의 집합이라고 할 수 있는 마스터 스텝 (mt) 인데 저는 개인적으로 푸는 데 너무 재밌었습니다. 저는 문제를 풀면서 규토쌤이 괜히 문제 배치를 마지막에 하신 게 아니구나라는 것을 느꼈습니다. 이 문제들은 약간 방금 전에 언급한 t1, t2 문제들을 믹스 시킨 문제, 즉 기본 예제 들의 집합이라고 느꼈습니다. 마스터 스텝 문제까지 책의 공부법으로 완전히 흡수시켜야 비로소 책의 취지에 맞게 안정적인 1등급에 도달한다고 느끼게 되었습니다.

이제 공부법에 대해 얘기해보려 합니다. 사실 제가 제일 강조하고 싶은 부분입니다!! 제 성적향상의 근원이기도 합니다ㅎ 올해 3월달... 저의 수학 성경책을 받은 날이었죠. 저는 책과 물아일체가 되겠다는 마음가짐으로 임했습니다. 규토 선생님께서 강조하시는 수학 공부법이 처음에는 어색했지만 계속 적용해보니까 수능 수학에 가장 이상적이고 적합한 방법이라는 것을 깨달았습니다. 제가 세 번의 모의고사에서 1등급을 받은 그 공부법! 100% 공부법의 핵심은 "누군가에게 설명할 수 있다"입니다. 사실 혹자께서는 문제를 잘 푸는 거랑 어떤 차이냐고 물으실 수 있는데 사실은 엄청난 차이가 있다고 생각합니다. 문제를 완벽하게 설명하려면 풀이를 써 내려갈 때 개념 간의 논리를 정확하게 이해하고 남을 이해시킨다는 마음으로 문제를 정확히 자기 것으로 만들어야 합니다. 저는 이 과정이 정말 힘들었습니다. 하지만, 계속 거듭하고 묵묵히 하다보니 가속도가 붙더라고요! 내년에 공부하실 2024 규토 수험생분들도 이 부분을 강조하며 공부하시면 충분히 좋은 결과 있으실 거라고 믿습니다!!

마지막으로 규토 선생님! 제 수학 성적을 눈부시게 끌어올려 주셔서 감사합니다! ㅎㅎ

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

– 규토 N제 수1,수2,미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기 –

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각했고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 '나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나'를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 '규토 라이트 N제'입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 '라이트' 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신 있게 추천드립니다.
[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(쎈)과 규토 라이트N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제(30번)까지 모두 다룹니다. 과장없이 미적분 2022평가원문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주시는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사설 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데요, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. 'theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같게 느껴질 때 비로소 이해한 것' 이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 → 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1,2 학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀리더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해봐야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까.교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에선 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됐고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제양과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

개념익히기와 〈1 step〉 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 〈2 step〉 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됐던 step이었습니다. 하지만 이 단계부턴 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 〈2 step〉만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리하실 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. 〈2 step〉를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습니다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다.

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더

라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘드신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다.

코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다.

많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, "이 책을 공부하는 방법(?)"이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다.

규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갉아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했었던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다. 그렇게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.

늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

Guide step

개념 익히기편

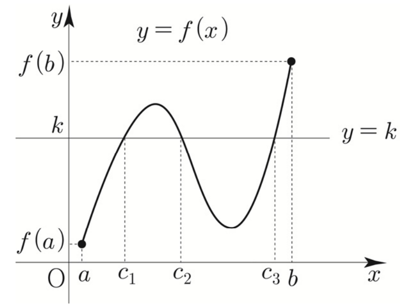
2. 함수의 연속

개념 파악하기 **(5) 사잇값의 정리란 무엇일까?**

사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 이 구간에서
함수 $y=f(x)$의 그래프는 끊어지지 않고 연결되어 있다.

따라서 $f(a) \neq f(b)$일 때, 오른쪽 그림과 같이
$f(a)$와 $f(b)$사이에 있는 임의의 값 k에 대하여
직선 $y=k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 적어도 한 점에서
만난다는 것을 알 수 있다.



사잇값의 정리 요약

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때,
$f(a)$와 $f(b)$사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인
c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Tip 사잇값을 이용할 때는 주어진 전제조건들을 잘 살펴보아야 한다.
즉, a와 b사이의 구간은 닫힌구간이어야 하고, 그 구간 안에서 함수 $f(x)$는 연속이어야 하며
$f(a) \neq f(b)$ 이어야 한다. 이러한 전제 조건들 중 어느 하나라도 만족하지 않으면
사잇값의 정리를 이용할 수 없다.

사잇값의 정리의 활용

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면
사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인
c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Tip 1 실전적으로 볼 때, 사잇값의 정리보다는 사잇값의 정리의 활용을 기억하는 편을 추천한다.

Tip 2 사잇값의 정리의 활용에서 $f(a)f(b)<0$라는 말은 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르다는 뜻이다.
만약 $f(a)f(b)>0$ 즉, $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 같다면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서
실근이 존재하지 않을 수도 있다.

Tip 3 사잇값의 정리는 c가 정확히 무엇인지 혹은 c가 몇 개 존재하는지가 궁금한 것이 아니라
전제조건을 만족시키기만 하면 Simple하게
“c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.”라는 말을 하고 싶은 것이다.

Tip 4 구간을 쪼개서 사잇값의 정리를 사용하는 문제가 출제될 수도 있다.
예를 들어 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 $f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(3)>0$이라 할 때,
방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 몇 개의 실근을 가지는지 판단해보자.

관성적으로 접근하면 $f(1)f(3)<0$이 아니라서 난감할 수 있는데
이 때, 닫힌구간 $[1,\ 3]$을 $[1,\ 2]$와 $[2,\ 3]$로 쪼개서 생각해볼 수 있다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이므로 닫힌구간 $[1,\ 2]$, $[2,\ 3]$에서도 모두 연속이다.
$f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_1)=0$인
c_1가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재하고
마찬가지로 $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_2)=0$인
c_2가 열린구간 $(2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

Tip 5 만약 방정식이 $f(x)=0$꼴이 아니라면 방정식을 변형하여 $f(x)=0$꼴로 만들자.
예를 들어 방정식 $g(x)=1$를 방정식 $g(x)-1=0$로 변형한 뒤
$g(x)-1=f(x)$라 치환하면 $f(x)=0$꼴로 만들 수 있다.
그 다음 사잇값의 정리의 활용을 사용하면 된다.

예제 7

방정식 $x^3+x=3$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

풀이

$x^3+x=3 \Rightarrow x^3+x-3=0$
$f(x)=x^3+x-3$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고
$f(1)=-1<0$, $f(2)=7>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인
c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^3+x=3$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

개념 확인문제 7

방정식 $x^4-x-1=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

1 Theme 함수의 연속

001

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x<1) \\ x^2+a & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

002

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x \neq 2) \\ a & (x=2) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

003

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

004

함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+x & (|x|>1) \\ x^2+ax+b & (|x| \leq 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-4b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

005

함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{ax^2+ax+2}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

006

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x-2)f(x)=x^2+ax+4$를 만족시킬 때, $f(2)+f(3)$ 의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

007

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & (x<2) \\ ax-1 & (x \ge 2) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 합을 구하시오.

008

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+a+1 & (x<a) \\ 2a+3 & (x \ge a) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $\lim_{x\to 2a} f(x)<5$ 일 때, $f(a-2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

2 Theme 연속함수의 성질

009

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+5 & (x<3) \\ 2 & (x \ge 3) \end{cases},\quad g(x)=ax-9$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

010

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2ax+b & (-2 \le x<0) \\ ax+3 & (0 \le x<2) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

개념 파악하기 (7) 함수의 실수배, 합, 차, 곱은 어떻게 미분할까?

함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음 함수
$kf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$의 도함수를 구해 보자.

① $\{kf(x)\}'=kf'(x)$ (단, k는 상수)

$$\{kf(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k\{f(x+h)-f(x)\}}{h}=k\times\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=kf'(x)$$

② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$$\{f(x)+g(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

$$\{f(x)-g(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-g(x+h)\}-\{f(x)-g(x)\}}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)-g'(x)$$

④ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to0}g(x+h)+\lim_{h\to0}f(x)\times\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Tip 1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g'(x)$라고 생각하지 않도록 유의하자. 반례를 들어보면 $\{f(x)g(x)\}'\neq f'(x)g'(x)$임이 자명하다.
$f(x)=x$, $g(x)=x^3$이라 하면 $f(x)g(x)=x^4$이므로 $\{f(x)g(x)\}'=(x^4)'=4x^3$이다.
$f'(x)=1$, $g'(x)=3x^2$이므로 $f'(x)g'(x)=3x^2$이다. 따라서 $\{f(x)g(x)\}'\neq f'(x)g'(x)$이다.

Tip 2 함수의 곱의 미분을 이용하여 미분가능한 세 함수의 곱도 미분할 수 있다.
세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때,
$$\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)\{g(x)h(x)\}+f(x)\{g(x)h(x)\}'$$
$$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

Training – 2 step

기출 적용편

1. 미분계수와 도함수

072 | 2018학년도 수능 나형

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$을 만족시킬 때,

$f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

073 | 2012년 고3 3월 교육청 가형

함수 $f(x)=x|x|+|x-1|^3$에 대하여

$f'(0)+f'(1)$의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

074 | 2014학년도 수능예비시행 B형

$x>0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고

$2x\le f(x)\le 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때,

$f'(1)+f'(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

075 | 2021학년도 수능 나형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$를 만족시킨다.

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

076 | 2011학년도 고3 6월 평가원 가형

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=4$

077 | 2021년 고3 3월 교육청 공통

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때,

ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Master step

심화 문제편

1. 미분계수와 도함수

080

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(2x+1)=f(x)+3x^2-ax$이다.
(나) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 $-\frac{1}{2}$에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 b이다.

$10(b-a)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

081 | 2015년 고3 3월 교육청 B형

삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x<k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

082

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ f(x-a)+b & (x<0) \end{cases}$$

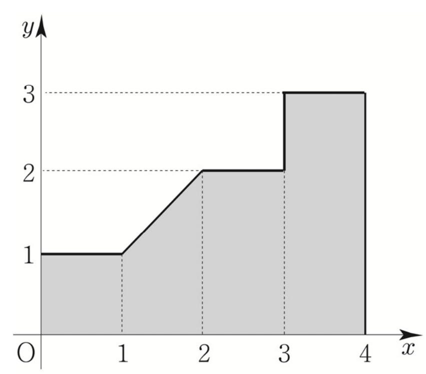
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때,
$\lim_{t \to c+} h(t)+h(c)=\lim_{t \to c-} h(t)$이다.

$a+2b+3c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

083 | 2014학년도 수능예비시행 A형

좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ 0)$, $(t,\ t)$, $(0,\ t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

Guide step

개념 익히기편

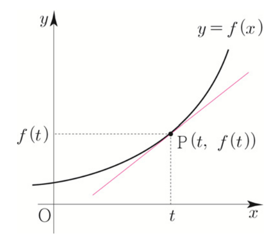
2. 도함수의 활용

01 접선의 방정식

성취 기준 | 접선의 방정식을 구할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

접선의 방정식 유형 ① 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

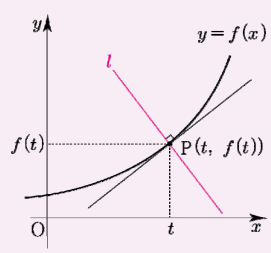


함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의
접선의 기울기는 $x=t$에서의 미분계수 $f'(t)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접하는 접선은
점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 $f'(t)$인 직선이므로 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

Tip 1 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=m(x-a)+b$이다.

Tip 2 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로 곡선 $y=f(x)$
위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선 l의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ (단, $f'(t)\neq 0$)이다.



예제 1

다음 물음에 답하시오.

(1) 곡선 $y=x^2+x+2$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 곡선 $y=2x^2-x$ 위의 점 $(-1,\ 3)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

풀이

(1) $f(x)=x^2+x+2$라 하면 $f'(x)=2x+1$
점 $(1,\ 4)$에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3(x-1)+4$이므로 $y=3x+1$이다.

(2) $f(x)=2x^2-x$라 하면 $f'(x)=4x-1$
점 $(-1,\ 3)$에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(-1)=-5$이다.
이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $f'(-1)\times m=-1$이므로 $m=-\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{5}(x+1)+3$이므로 $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{16}{5}$이다.

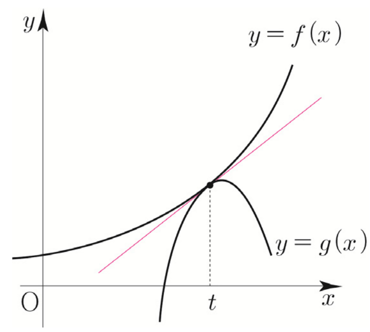
접선의 방정식 유형 ④ 두 곡선에 동시에 접하는 접선

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선은 다음과 같이 case분류할 수 있다.

(1) 접점의 x좌표가 동일한 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$x=t$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서의 접선이 서로 일치하므로 다음과 같은 방법으로 구한다.

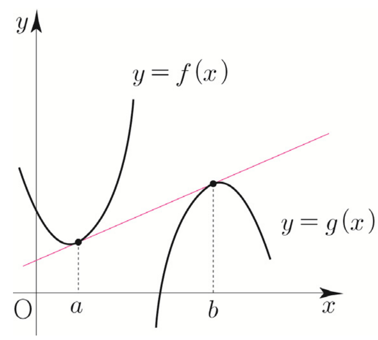
① $x=t$에서의 함숫값이 같다. $\Rightarrow$ $f(t)=g(t)$
② $x=t$에서의 접선의 기울기가 같다. $\Rightarrow$ $f'(t)=g'(t)$



(2) 접점의 x좌표가 동일하지 않은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b,\ g(b))$에서의 접선이 서로 일치한다.
$y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수, $y=g(x)$의 $x=b$에서의 미분계수, 두 점 $(a,\ f(a))$와 $(b,\ g(b))$를 지나는 직선의 기울기가 모두 같으므로 다음과 같은 방법으로 구한다. (단, $a\neq b$)

$$f'(a)=g'(b)=\frac{g(b)-f(a)}{b-a}$$

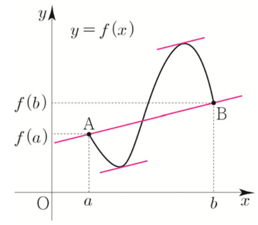


Tip $y=f'(a)(x-a)+f(a)=f'(a)x-af'(a)+f(a)$와
$y=g'(b)(x-b)+g(b)=g'(b)x-bg'(b)+g(b)$가 같아야 하므로
① 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(a)=g'(b)$
② y절편이 같다. $\Rightarrow -af'(a)+f(a)=-bg'(b)+g(b)$
$\Rightarrow -af'(a)+f(a)=-bf'(a)+g(b)\ (\because f'(a)=g'(b))$
$\Rightarrow f'(a)=\dfrac{g(b)-f(a)}{b-a}\ \ (\because\ a\neq b)$

따라서 $f'(a)=g'(b)=\dfrac{g(b)-f(a)}{b-a}$이다.

개념 파악하기 (3) 평균값 정리란 무엇일까?

평균값 정리



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Tip 1 평균값 정리는 열린구간 $(a,\ b)$에서 직선 AB와 평행한 곡선 $y=f(x)$의 접선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.

Tip 2 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$이면 두 점 $(a,\ f(a))$와 $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 0이므로 평균값 정리는 롤의 정리를 일반화한 것이다.

Tip 3 평균값 정리에서 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다는 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 평균값 정리가 성립하지 않는다.

(1) 불연속인 함수

함수 $f(x)=\begin{cases} 0 & (x<1) \\ 1 & (x\geq 1) \end{cases}$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하고

$f(0)=0,\ f(1)=1$이므로 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$이지만 $0<c<1$인 모든 c에 대하여

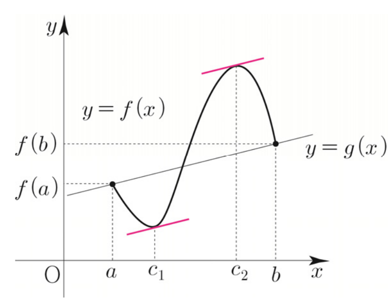
$f'(c)=0$이다. 따라서 $f'(c)=1$을 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하지 않는다.

(2) 미분가능하지 않은 함수

함수 $f(x)=|x|$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이지만 $-1<c<2$인 c에 대하여

$f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{2-1}{3}=\dfrac{1}{3}$을 만족시키는 실수 c는 존재하지 않는다.

평균값 정리 증명



평균값 정리를 증명해보자.
곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하면 $g(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$이다.
이때 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)=0$이다.
따라서 롤의 정리를 이용하면

$h'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Tip 평균값 정리는 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하면 되고 만약 1회독 중인 학생이라면 증명과정은 넘어가도 된다.

개념 파악하기 (6) 함수의 극대와 극소란 무엇일까?

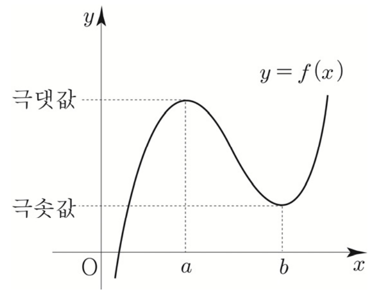
함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f(x) \le f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**가 된다고 하고,
그 때의 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

② $f(x) \ge f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**가 된다고 하고,
그 때의 함숫값 $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

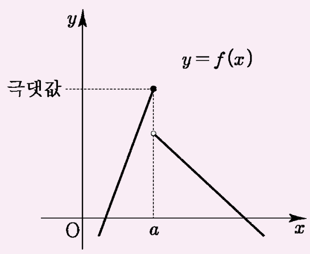
극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



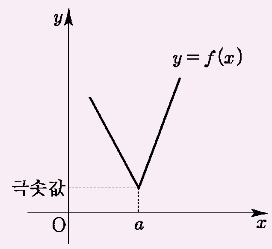
Tip 1 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간이라는 뜻은 $x=a$를 포함하는 아주 작은 열린구간이라고 생각하면 된다.

Tip 2 극대 극소의 정의를 보면 $f(x)$가 연속이나 미분가능해야 한다는 전제조건이 없다.
따라서 불연속 혹은 미분가능하지 않아도 함숫값만 존재한다면 극대와 극소가 존재할 수 있다.

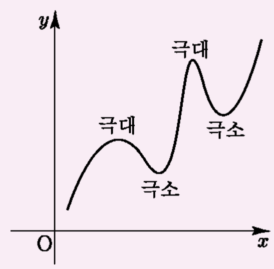
ex $x=a$에서 불연속해도 $x=a$에서 극대



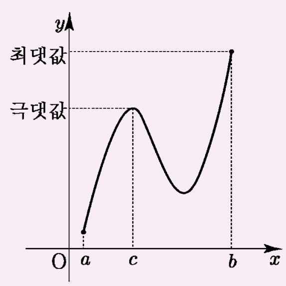
ex $x=a$에서 미분가능하지 않아도 $x=a$에서 극소



Tip 3 극대와 극소는 여러 개 존재할 수 있고
극댓값이 극솟값보다 항상 큰 것은 아니다.



Tip 4 극댓값(극솟값)이 꼭 최댓값(최솟값)은 아니다.



Tip 5 $f(x)$가 상수함수라면 $x=a$에서 극값을 갖는 a는 무수히 많다.
이때 함숫값 $f(a)$는 극댓값도 되고 극솟값도 된다.

04 함수의 그래프

성취 기준 | 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (7) 함수의 그래프의 개형은 어떻게 그릴까?

함수의 그래프의 개형 그리기

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 과정으로 그릴 수 있다.

① 도함수 $f'(x)$를 그린다.

② $f'(x)$의 부호를 판단하여 증감을 고려한 대략적인 $f(x)$를 그린다.

③ 극댓값 or 극솟값 or x절편 or y절편 등을 고려하여 디테일하게 함숫값을 표시한다.

④ 최종적으로 ②+③을 고려하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

Tip 1 ①에서 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$를 그릴 때, y축은 생략가능하다.

Tip 2 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$에서 항상 양수인 부분은 고려하지 않아도 된다.

ex1 $f'(x)=10x(x-1)$이라면 $f'(x)=x(x-1)$라 두고 판단해도 된다.
ex2 $f'(x)=(x^2+1)x$이라면 $f'(x)=x$라 두고 판단해도 된다.
이때 두 번째 $f'(x)$를 Semi **도함수**라고 하자. (소통을 위한 필자와의 약속)

Tip 3 위와 같은 방식 즉, 증감표를 그리지 않고 $f'(x)$를 그려서 $f'(x)$의 부호를 판단하려면 x절편을 바탕으로 3차 이상의 다항함수를 빨리 그릴 수 있어야 한다. (방법은 아래와 같다.)

x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [1단계] – 시작 방향 정하기

① 홀수차 함수 ex 일차함수, 삼차함수, …

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

Tip 일차함수를 생각하면 된다.

② 짝수차 함수 ex 이차함수, 사차함수, ⋯

(ⅰ) 최고차항의 계수가 양수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

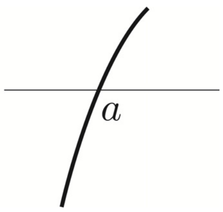
(ⅱ) 최고차항의 계수가 음수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

Tip 이차함수를 생각하면 된다.

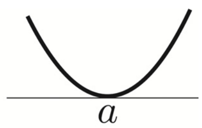
x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [2단계] – x 절편 이용하기

$f(x)$가 $(x-a)^n$을 인수로 가질 때, n에 따라 case분류할 수 있다.

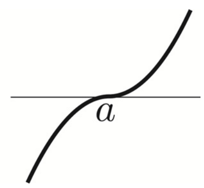
① $n=1 \Rightarrow (x-a)$



② $n=2 \Rightarrow (x-a)^2$ ($n \geq 2$인 짝수)



③ $n=3 \Rightarrow (x-a)^3$ ($n \geq 3$인 홀수)



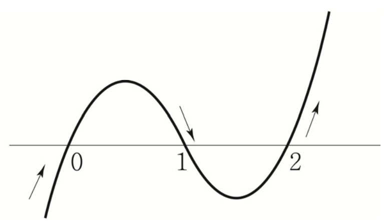
Tip ②은 스치는 접선형태(스접)를 갖고, ③은 뚫는 접선형태(뚫접)를 갖는다.
쉽게 말해서 ②은 $y=x^2$같은 느낌이고, ③은 $y=x^3$같은 느낌이다.

x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [3단계] – 실전연습

ex1 $y=x(x-1)(x-2)$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

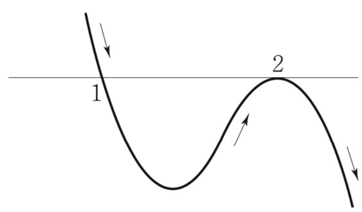
② x절편이 0, 1, 2이고 x, $(x-1)$, $(x-2)$를 인수로 가지므로
$x=0$, 1, 2를 통과해서 그려주면 된다.



ex2 $y=-(x-1)(x-2)^2$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

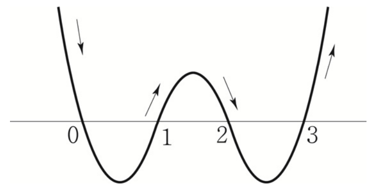
② x절편이 1, 2이고 $(x-1)$, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=1$를 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex3 $y=x(x-1)(x-2)(x-3)$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

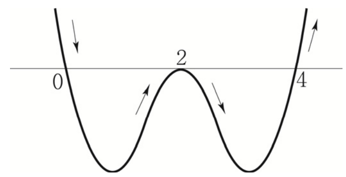
② x절편이 0, 1, 2, 3이고 x, $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$을 인수로 가지므로
$x=0$, 1, 2, 3을 통과해서 그려주면 된다.



ex4 $y=x(x-2)^2(x-4)$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

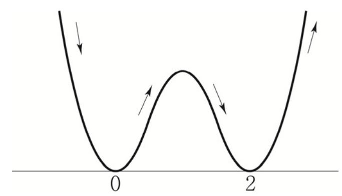
② x절편이 0, 2, 4이고 x, $(x-2)^2$, $(x-4)$를 인수로 가지므로
$x=0$, 4를 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex5 $y=x^2(x-2)^2$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

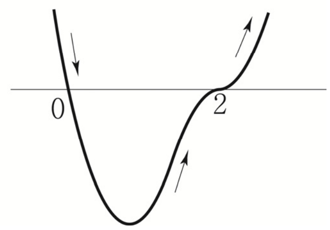
② x절편이 0, 2이고 x^2, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=0$, 2에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex6 $y=x(x-2)^3$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

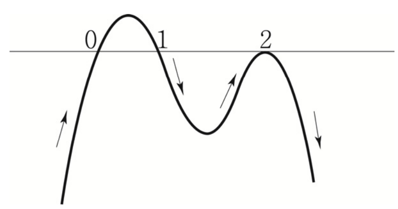
② x절편이 0, 2이고 x, $(x-2)^3$를 인수로 가지므로
$x=0$을 통과하고 $x=2$에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex7 $y=-x(x-1)(x-2)^2$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

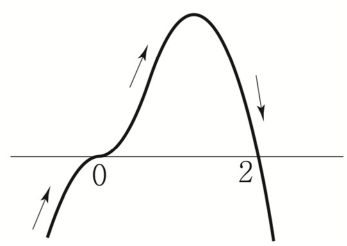
② x절편이 0, 1, 2이고 x, $(x-1)$, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=0$, 1을 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex8 $y=-x^3(x-2)$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

② x절편이 0, 2이고 x^3, $(x-2)$를 인수로 가지므로
$x=2$를 통과하고 $x=0$에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



07 삼차함수와 사차함수의 그래프 (심화특강)

성취 기준 | 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형을 설명할 수 있다.
삼차함수와 사차함수의 특징을 설명할 수 있다.
식세우기 Technique을 이용하여 삼차함수와 사차함수에 관한 식을 빠르게 세울 수 있다.

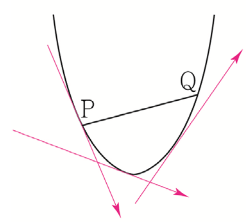
개념 파악하기 (12) 곡선의 오목과 볼록은 어떻게 알 수 있을까?

이계도함수

함수 $f'(x)$의 도함수를 함수 $y=f(x)$의 **이계도함수**라 하고 기호로 $f''(x)$와 같이 나타낸다.

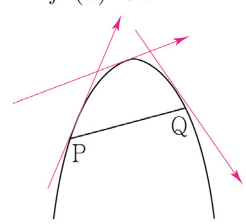
곡선의 오목과 볼록

이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 조사해 보자.
어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여



① 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면
곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 **아래로 볼록**하다고 한다.
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$의
접선의 기울기인 $f'(x)$는 증가하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

ex $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f''(x)=2>0$



② 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 위쪽에 있으면
곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 **위로 볼록**하다고 한다.
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$의
접선의 기울기인 $f'(x)$는 감소하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

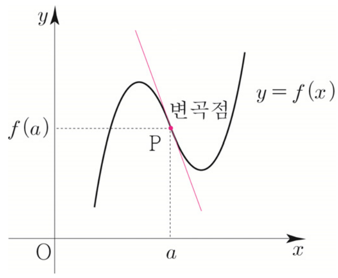
ex $f(x)=-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x \Rightarrow f''(x)=-2<0$

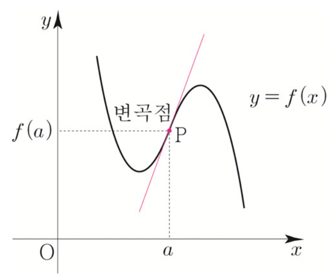
Tip 1 $f''(x)$는 $f'(x)$의 도함수이므로 $f''(x)$의 부호로 $f'(x)$의 증감을 파악할 수 있다.
즉, $f''(x)$의 부호는 접선의 기울기의 증감에 관련되어 있다.

Tip 2 사실 이계도함수는 수2가 아닌 미적분에서 배우는 내용이다.
하지만 이계도함수를 학습하고 나면 삼차함수와 사차함수를 가볍게 위에서 내려다 볼 수 있다.
그렇게 어려운 개념도 아니고 학습하는 것을 추천한다.

변곡점

곡선의 모양이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$를 경계로 하여 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀔 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**이라 한다.
즉, 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 **부호가 바뀌면** 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.



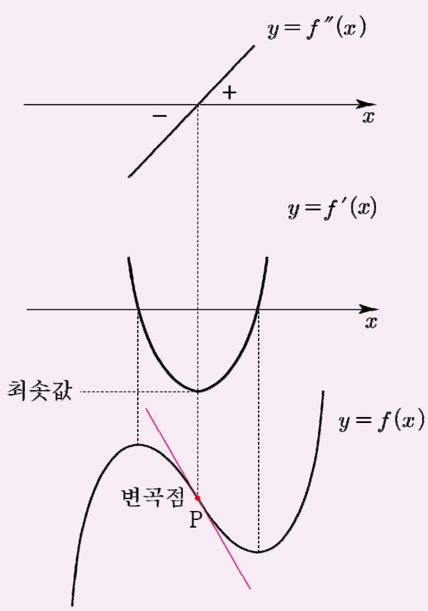


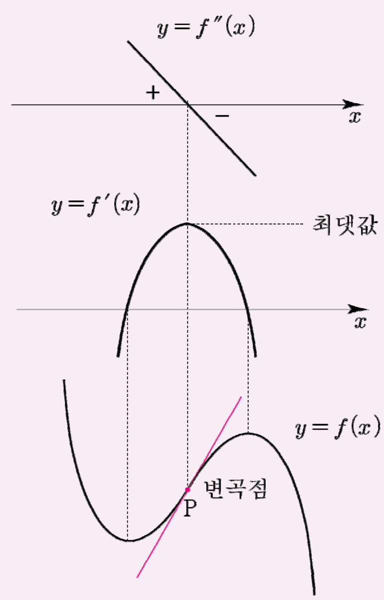
Tip 1 $f''(a)=0$이면 항상 변곡점일까? 답은 “아니다.”이다. 예를 들어 $f(x)=x^4$는 $f''(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)>0$이므로 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.
따라서 $f''(a)=0$인 것뿐만 아니라 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 확인해줘야 한다.

Tip 2 특별히 변곡점에서의 접선을 **변곡접선**이라 부른다. 곡선이 변곡점에서 접선을 가지면 곡선은 그 점에서 접선과 교차한다. 즉, 뚫접(뚫는 접선)이 그려진다.
참고로 수2에서도 변곡접선을 출제하기 시작했으니 이번 기회에 확실히 알아두자.

특히 삼차함수에서의 변곡접선은 접선들 중 기울기가 $f(x)$의 최고차항의 계수의 부호에 따라 제일 작거나 제일 크기 때문에 출제하기 아주 좋은 포인트이다.
(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(a)$와 같다.)

① $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수 ② $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수



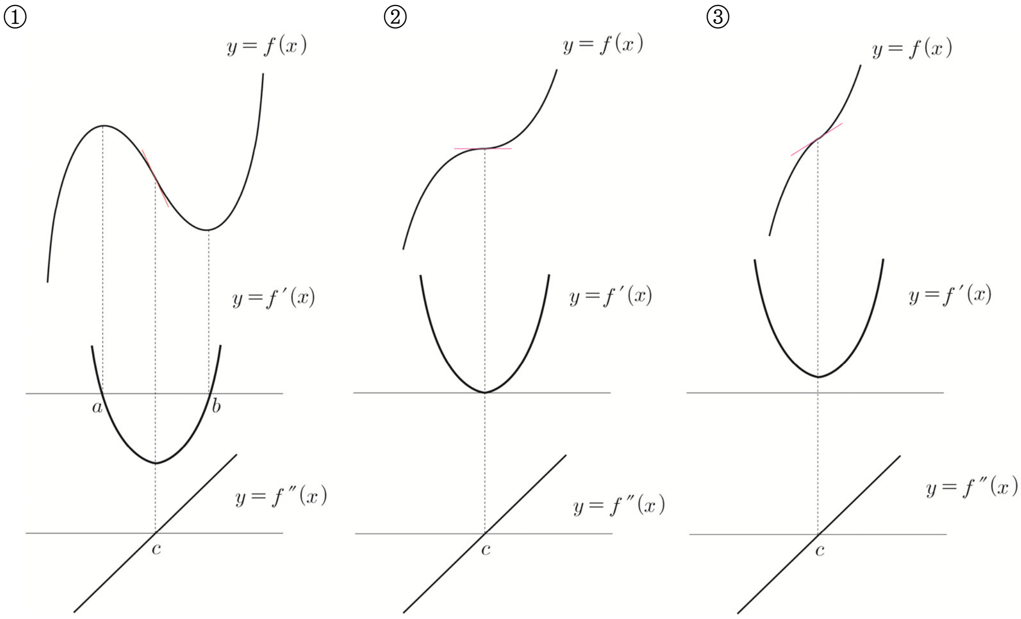


개념 파악하기 **(13) 삼차함수의 그래프는 어떠한 특징을 가지고 있을까?**

삼차함수의 그래프의 개형

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 실근의 개수에 따라 case분류할 수 있다.

① ② ③



Tip 1 위의 세 유형은 머릿속에 완벽히 각인 시켜야한다. 삼차함수 개형은 몇 가지? 3가지!

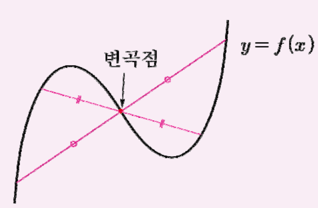
Tip 2 ①에서 $(c,\ f(c))$가 $y=f(x)$의 변곡점이다. $y=f''(x)$를 그리지 않고도 $y=f(x)$의 변곡점을 찾을 수 있다. $x=c$에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로 $x=c$에서 $f'(x)$는 극값을 갖는다.
즉, $f'(x)$가 극값을 갖는 점의 x값이 $y=f(x)$의 변곡점의 x값이 된다.

Tip 3 (1) 증가함수 (2) 감소함수 (최고차항의 계수가 음수일 때) (3) 일대일 대응
(4) 역함수 존재 (5) 극값 존재 X
$\Rightarrow$ ②, ③ 개형
$\Rightarrow$ 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 해로 갖는다. (판별식 $D\le 0$)

Tip 4 ③에서 $y=f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 c이므로 $(c,\ f(c))$은 $y=f(x)$의 변곡점이다.

Tip 5 삼차함수를 두 번 미분하면 일차함수이므로 $f''(x)=Ax+B$는 반드시 x축과 만나고, x축과 만나는 점을 경계로 부호가 변하므로 모든 삼차함수는 변곡점을 갖는다.

Tip 6 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있다.



삼차함수의 변곡점임을 알려주는 식

(ⅰ) $f(x)+f(2a-x)=2b$
위의 식은 $f(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대칭되어 있다는 뜻이다. 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있으므로 $(a,\ b)$는 $y=f(x)$의 변곡점이다.

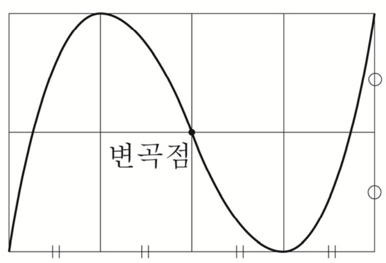
(ⅱ) $f(x)$가 삼차함수일 때, $f'(x)$는 $x=a$에서 음수인 최솟값을 갖는다.
$f'(x)$가 $x=a$에서 최솟값, 최댓값을 갖는다는 의미는 $f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 a라는 의미이므로 $(a,\ f(a))$가 $y=f(x)$의 변곡점임을 알려주지만
굳이 음수라고 한 이유는 극대와 극소를 모두 가지고 있는 삼차함수의 개형(①개형)임을 알려주기 위함이다.

(ⅲ) $f(x)$가 삼차함수일 때, $f'(x)=f'(2a-x) \Leftrightarrow f'(a-x)=f'(a+x)$
$f'(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭되어 있다는 의미이다. 즉, $f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 a이므로 $(a,\ f(a))$는 $y=f(x)$의 변곡점이다.

(ⅳ) $f(x)$가 삼차함수일 때, $f'(1)=0,\ f'(3)=0$
$f'(x)$는 이차함수이므로 꼭짓점의 x좌표는 $x=1$과 $x=3$의 중점인 $x=2$이다.
따라서 $(2,\ f(2))$는 $y=f(x)$의 변곡점이다.

삼차함수의 비율관계

극소와 극대를 모두 가지는 삼차함수는 아래 BOX에 넣을 수 있다.

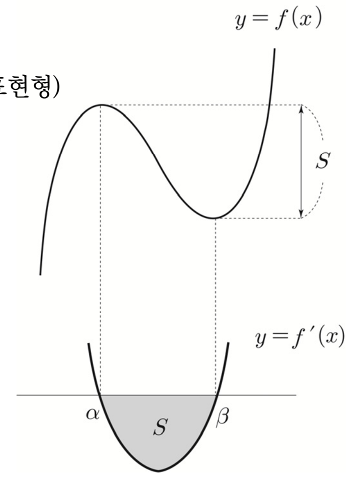


Tip 1 작은 사각형은 직사각형이 될 수도 있고 정사각형이 될 수도 있다.
즉, 문제조건에 따라 달라진다.

Tip 2 위 BOX를 통해 자연스럽게 삼차함수의 비율관계를 알 수 있다.

미분

극값차 공식



오른쪽 그림과 같이 $f'(x)$가 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx = S$ (표현형)

$\int_{\alpha}^{\beta}-f'(x)\,dx = f(\alpha)-f(\beta)$ 이므로 넓이 S는 극값차이다.

여기서 넓이 S를 구할 때 우리가 자주 쓰는 적분 공식을 적용시켜 보자.

$f'(x)$의 최고차항의 계수를 A라고 하면 $S=\frac{|A|}{6}(\beta-\alpha)^3$ (p300 참고)

여기서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a라 하면 $3a=A$ 이므로

즉, $S=\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$ 이다.

따라서 극값차 $=\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$ 이다.

Tip 적분을 배우지 않은 학생은 우선 공식만이라도 외워두도록 하자.
계산과정을 현격하게 줄여줄 수 있으니 외우는 것을 추천한다.

ex 삼차함수 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1,\ x=2$에서 극값을 가지고 $f(1)=10$일 때,
$f(2)$의 값을 구하시오.
$f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, $x=2$에서 극소이므로
$f(1)-f(2)=\frac{|4|}{2}(2-1)^3 \Rightarrow f(2)=10-2=8$

Tip 물론 $f'(1)=0,\ f'(2)=0,\ f(1)=10$을 이용하여 상수 $a,\ b,\ c$를 찾아서 $f(2)$를 구해도 된다.

식세우기 Technique

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1일 때,

① $f(1)=f(2)=f(3)$
$f(1)=f(2)=f(3)=k$라 두면 $f(1)-k=0,\ f(2)-k=0,\ f(3)-k=0$
$f(x)-k=g(x)$라 하면 $g(1)=0,\ g(2)=0,\ g(3)=0$을 만족하므로
$g(x)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)$를 인수로 갖는다.
$-k$는 $f(x)$의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)-k=(x-1)(x-2)(x-3)$이다.

② $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3$
$f(1)-1=0,\ f(2)-2=0,\ f(3)-3=0$
$f(x)-x=g(x)$라 하면 $g(1)=0,\ g(2)=0,\ g(3)=0$을 만족하므로
$g(x)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)$를 인수로 갖는다.
$-x$는 $f(x)$의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$

기함수이므로 x^n(n은 홀수)만 존재해야 한다. 즉, $f(x)=x^3-ax$이다.

Tip 만약 $f(x)=x^3+ax$라 두면 $f'(x)=3x^2+a$이므로

방정식 $f'(x)=3x^2+a=0$의 해가 $x=\pm\sqrt{\dfrac{-a}{3}}$ 이 된다. 물론 $a<0$라는 전제 조건을 사용하여 식을 전개해도 되지만 루트 안에 $-$가 있어 실수하기 쉽다.

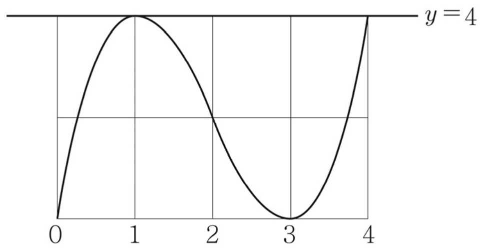
따라서 처음부터 $f(x)=x^3-ax$라 두면 방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ $(a>0)$이므로 실수할 여지를 줄일 수 있다.

물론 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$일 때는 $f(x)=x^3+ax$라 두는 편이 좋긴 하지만

빈도수면에서 $f(x)=x^3-ax$가 유리하다. ($\because$ 극값을 갖는 개형의 빈도가 더 多)

④ $f(x)$는 $x=1$일 때, 극댓값 4를 갖고, $x=3$일 때, 극솟값을 갖는다.

Box를 그리면 다음과 같다.



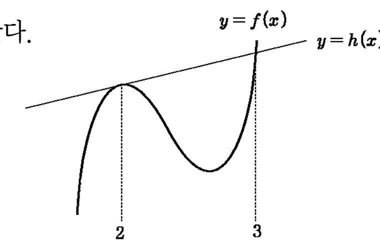
방정식 $f(x)=4$는 $x=1$에서 중근과 $x=4$에서 하나의 실근을 갖는다.

$f(x)-4=g(x)$라 하면 방정식 $g(x)=0$은 $x=1$에서 중근과 $x=4$에서 하나의 실근을 가지므로

$g(x)$는 $(x-1)^2(x-4)$를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x)=(x-1)^2(x-4) \Rightarrow f(x)-4=(x-1)^2(x-4)$이다.

⑤ 직선 $h(x)$가 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $x=2$에서 접하고 $x=3$에서 $f(x)$와 만난다.



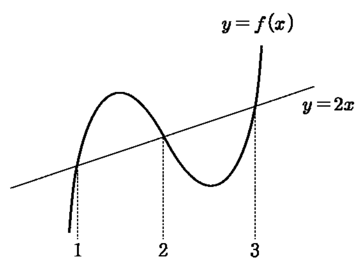
방정식 $f(x)=h(x)$는 $x=2$에서 중근 $x=3$에서 실근을 갖는다.

$f(x)-h(x)=g(x)$라 하면 방정식 $g(x)=0$은 $x=2$에서 중근과

$x=3$에서 하나의 실근을 가지므로 $g(x)$는 $(x-2)^2(x-3)$를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x)=(x-2)^2(x-3) \Rightarrow f(x)-h(x)=(x-2)^2(x-3)$이다.

⑥ $y=2x$와 삼차함수 $f(x)$가 $x=1,\ 2,\ 3$에서 만난다.



$g(x)=f(x)-2x$라 하면 $g(1)=0,\ g(2)=0,\ g(3)=0$이므로

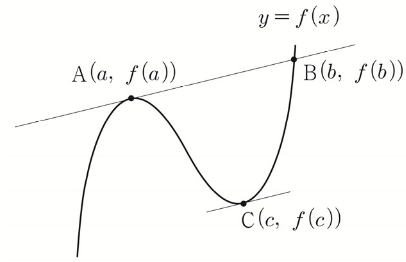
$g(x)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)$를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)-2x=(x-1)(x-2)(x-3)$이다.

미분

식세우기 응용

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중 접점이 아닌 점을 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$라 하자. 함수 $f(x)$의 구간 $[a,\ b]$에서의 평균변화율과 $x=c$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, c를 $a,\ b$로 표현해보자.



$f'(a)=f'(c)=m$

접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)=g(x)$

최고차항의 계수를 k라 두고 식을 세우면 $f(x)-g(x)=k(x-a)^2(x-b)$

양변을 미분하면

$f'(x)-g'(x)=2k(x-a)(x-b)+k(x-a)^2 \Rightarrow f'(x)-m=2k(x-a)(x-b)+k(x-a)^2$

$x=c$를 대입하면 $f'(c)-m=2k(c-a)(c-b)+k(c-a)^2$

$0=k(c-a)(2(c-b)+c-a) \Rightarrow 0=k(c-a)(3c-2b-a)$

$a\neq c$ 이므로 $c=\dfrac{a+2b}{3}$이다. 즉, c는 선분 AB의 $2:1$내분점의 x좌표와 같다.

Tip 위에서 배운 Box를 이용하면 $c=\dfrac{a+2b}{3}$임이 자명하다.

2 Theme 접선의 방정식-곡선 위의 점이 주어질 때

007

곡선 $y=x^3-6x+5$ 위의 점 $(-1,\ 10)$에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, $m+3n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

008

곡선 $y=-2x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선이 점 $(-5,\ b)$를 지날 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

009

곡선 $y=x^3-3x^2+2$ 위의 두 점 $(-1,\ -2)$, $(1,\ 0)$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2의 교점은 $(a,\ b)$이다. $3a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

010

함수 $f(x)=x^3-ax^2+4x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(0,\ f(0))$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{17}$일 때, 점 Q의 y좌표를 구하시오. (단, a는 양의 상수이다.)

011

곡선 $y=x^3-2x^2+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

012

곡선 $y=-2x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ 2)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $4ab$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

013

곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{7}$일 때, $b-2a$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

014

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-3}{x^2-4}=-4$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선의 방정식은 $y=mx+n$이다. $m+2n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

071

상수 $a(a>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^3(x+4a) & (x<0)\\ x^2(x-3a) & (x\ge 0)\end{cases}$$

의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, $81a$의 값을 구하시오.

072

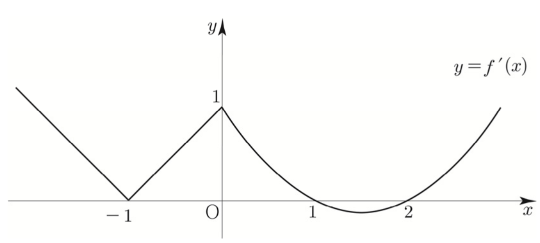
함수 $f(x)$의 도함수

$$f'(x)=\begin{cases}|x+1| & (x<0)\\ \frac{1}{2}(x-1)(x-2) & (x\ge 0)\end{cases}$$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 $f'(x)$는 3개의 극값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 증가한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
ㄹ. 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 함수 $f(x)$는 2개의 극값을 갖는다.
ㅁ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(1)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.



12 Theme 함수의 극대, 극소의 활용

073

함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x$는 $x=a$에서 극댓값 b를 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선을 l이라 할 때, 점 $(a,\ b)$와 직선 l 사이의 거리는 d이다. $10d^2$의 값을 구하시오.

074

다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$
(나) $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1-2h)}{h}$의 값을 구하시오.

075

최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $(x^2+2)f(x)$는 $x=0$에서 극값 6을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
(다) $\frac{12}{f'(2)}$는 자연수이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

096

두 함수 $f(x)=x^4-k$, $g(x)=-4x^2+2$에 대하여 집합 S는

$$S=\{x \mid f(x)=g(x)\text{이고 } -2<x<1\}$$

이다. $n(S)=1$이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

097

함수 $f(x)=x^3+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱이 $-a$일 때, $81a$의 값을 구하시오.

098

함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$x|f(x)|=\frac{k}{2}$$

의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오.

16 Theme 방정식의 활용

099

방정식 $2x^3-3x^2+k=0$이 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오.

100

서로 다른 두 실수 a, b가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. 다항식 $f(x)$는 $(x-a)(x-b)$으로 나누어 떨어진다.
ㄴ. $f'(a)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-a)^2(x-b)$으로 나누어 떨어진다.
ㄷ. $f'(a)f'(b)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄹ. $f'(a)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖지 않으면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㅁ. $f'(a)f'(b)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.
ㅂ. 방정식 $f(x)=0$이 허근을 갖지 않고 서로 다른 두 실근을 가지면 함수 $f(x)$는 극솟값을 가진다.

114

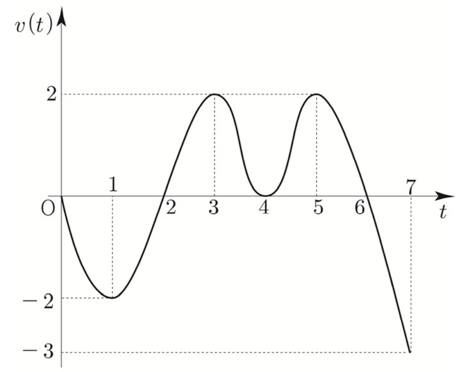
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 x가 $x=\frac{1}{4}t^4-t^3-\frac{9}{2}t^2$이다.
$0<t\le 4$에서 점 P의 속도를 v라 할 때, $|v|$의 최댓값을 구하시오.

115

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 x가 $x=t^3+at+b$이다. 점 P가 원점을 지날 때의 속도와 가속도가 각각 13, 12일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

116

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.



보기

ㄱ. $t=1$일 때와 $t=3$일 때, 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
ㄴ. $0<t<7$일 때, 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 4번이다.
ㄷ. $5<t<7$일 때, 점 P의 속도는 감소한다.
ㄹ. $t=6$일 때, 점 P의 가속도는 음의 값이다.
ㅁ. $t=2$일 때, 점 P는 원점을 지난다.
ㅂ. 점 P는 7초 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.
ㅅ. $t=3$일 때, 점 P는 정지한다.
ㅇ. $t=3$일 때와 $t=5$일 때, 점 P의 위치는 서로 같다.

미분

Master step

심화 문제편

2. 도함수의 활용

246 | 2022년 고3 3월 교육청 공통

두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6, \quad g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

247 | 2023학년도 고3 6월 평가원 공통

두 양수 a, b $(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

248 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq t)\\-f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

249 | 2023학년도 수능 공통

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.
(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

12 Theme 정적분으로 정의된 함수–New 함수

056

함수 $f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt$에 대하여

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때, 접점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}^2$의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이다.)

057

$-1 \le x \le 1$에서 함수 $f(x)=\int_{-1}^{1}|t-x|dt$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

058

함수 $f(x)=\begin{cases} -2x-2 & (x<0) \\ x^2-x-2 & (x \ge 0) \end{cases}$에 대하여

방정식 $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 개수를 구하시오.

059

함수 $f(x)=x^3-3x^2$에 대하여 함수 $g(x)$가

$g(x)=\int_{0}^{x}|f'(t)|dt$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

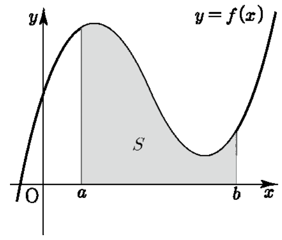
| 보기 |

ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)+f'(x)=0$이다.
ㄷ. 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a}g(x)=g(a)$ 이다.
ㄹ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㅁ. $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $g(x_1)<g(x_2)$이다.
ㅂ. 함수 $g(x)$의 역함수는 존재하지 않는다.
ㅅ. 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
ㅇ. 함수 $|g(x)-g(2)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㅈ. $g(-1)+g(1)+g(4)=22$

개념 파악하기 (2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

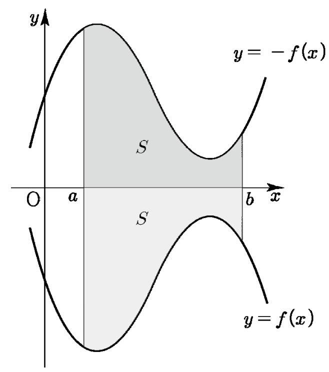
곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해 보자.



① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq 0$일 때, 정적분과 넓이의 관계에 따라

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

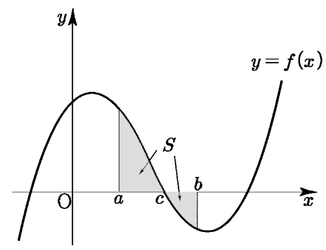


② 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \leq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-f(x)$와 x축에 대하여 대칭이고 $-f(x) \geq 0$이므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

③ 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \geq 0$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \leq 0$일 때,

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx$$



곡선과 x축 사이의 넓이 요약

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)|dx$이다.

Tip 1 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때는 $f(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 적분 구간을 나누어 계산한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x)|dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **표현형**이다. 즉, 보자마자 x축으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야한다.
실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인
① $\int_a^b f(x)dx$, ② $\int_a^b \{-f(x)\}dx$, ③ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$는
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **계산형**이다.

Tip 3 $\int_a^b |f(x)|dx$는 함수 $|f(x)|$ ($y=f(x)$의 그래프에서 x축 아래에 있는 부분을 x축 위로 접어올린 형태)를 a에서 b까지 적분했다고 볼 수도 있다.

예제 2

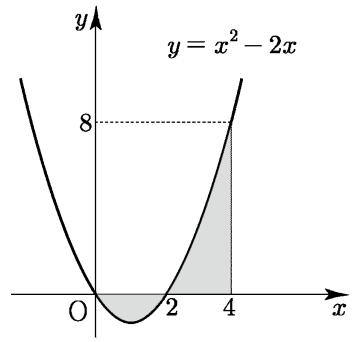
곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x=0$, $x=2$
닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $y \le 0$, 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 $y \ge 0$이므로
구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^4(x^2-2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^4$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$$



개념 확인문제 2

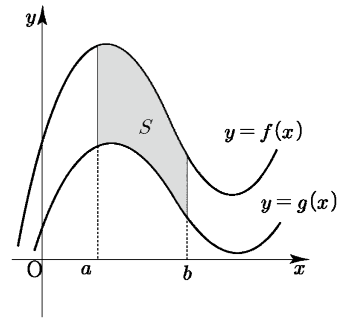
다음 곡선과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(1) $y=-x^2+3x-2$

(2) $y=x^3-x$

개념 파악하기 (3) 두 곡선 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

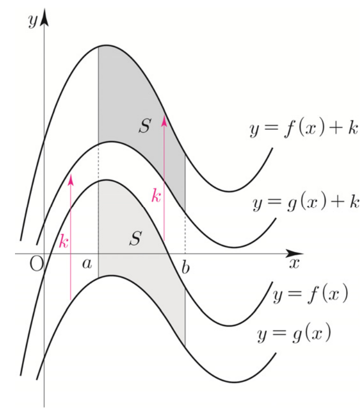
두 곡선 사이의 넓이



두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해 보자.

① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$일 때,

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

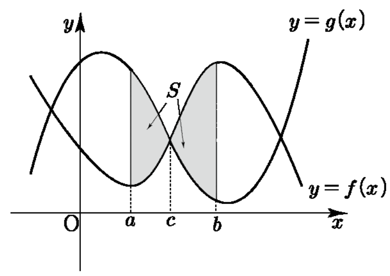


② 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq g(x)$이고 $g(x)$의 값이 음수인 경우가 있을 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 $f(x)+k \geq g(x)+k \geq 0$이 되도록 할 수 있다.
이때 평행이동한 도형의 넓이는 변하지 않으므로

$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

③ 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \leq g(x)$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \geq g(x)$일 때,

$$\begin{aligned}S&=\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx\\&=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\end{aligned}$$



두 곡선 사이의 넓이 요약

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.

Tip 1 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 대소가 바뀔 때는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **표현형**이다. 즉, 보자마자 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야한다.
실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인
①$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$, ②$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$, ③$\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$는
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **계산형**이다.

예제 3

두 곡선 $y=x^2-x$, $y=-x^2+3x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

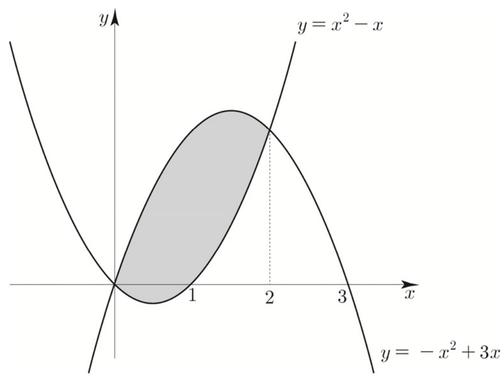
$x^2-x=-x^2+3x \Rightarrow 2x^2-4x=2x(x-2)=0$

두 곡선의 교점의 x좌표는 $x=0$, $x=2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2-x \le -x^2+3x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2\{(-x^2+3x)-(x^2-x)\}dx=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$



Tip 위에 있는 그래프에서 아래에 있는 그래프를 뺀 후 적분한다.

개념 확인문제 3

곡선 $y=-x^2+2$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

예제 4

곡선 $y=x^2+2x$와 세 직선 $y=x$, $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

$x^2+2x=x \Rightarrow x^2+x=x(x+1)=0$

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x=-1$, $x=0$

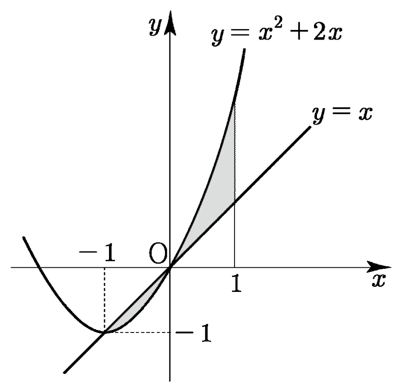
닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^2+2x \le x$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$x^2+2x \ge x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^0\{x-(x^2+2x)\}dx+\int_0^1\{(x^2+2x)-x\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(-x^2-x)dx+\int_0^1(x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$



개념 확인문제 4

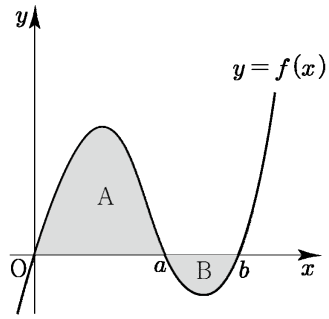
두 곡선 $y=-x^2$, $y=x^2-2x$와 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

적분

개념 파악하기 (4) 두 곡선 사이의 넓이를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까?

두 곡선 사이의 넓이의 활용

오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.



① A의 표현형은 $\int_0^a |f(x)|dx$이고 계산형은 $\int_0^a f(x)dx$이다.

B의 표현형은 $\int_a^b |f(x)|dx$이고 계산형은 $\int_a^b \{-f(x)\}dx$이다.

Tip 여기서 $\int_a^b f(x)dx = -\mathrm{B}$인 것을 쉽게 알 수 있다.

즉, $f(x) \le 0$일 때(x축 아래에 있을 때) 정적분을 하면 넓이에 마이너스가 붙는다.

② $\int_0^b f(x)dx = \mathrm{A}-\mathrm{B}$

$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_a^b \{-f(x)\}dx = \mathrm{A}-\mathrm{B}$

Tip 위와 같이 식으로 접근할 수도 있지만 자연스럽게 곡선 $y=f(x)$가 $a \le x \le b$에서 x축 아래에 있으므로 $\int_a^b f(x)dx = -\mathrm{B}$(넓이에 마이너스)이니 A에서 B를 빼면 $\int_0^b f(x)dx = \mathrm{A}-\mathrm{B}$가 된다.라는 사고과정으로 접근하는 것을 추천한다.

즉, A에서 B만큼의 넓이가 상쇄된다고 생각하면 된다.

③ A가 B보다 크니 $\int_0^b f(x)dx > 0$ 이다.

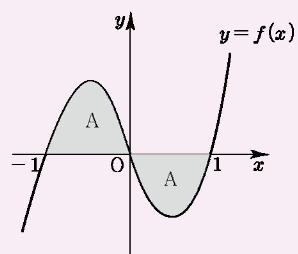
Tip 부정적분과 정적분 단원에서 $f(x)=x^3-x$라 할 때, $f(x)=x^3-x$가 기함수이므로 식 계산에 의해 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$임을 보였다.

이와 달리 위에서 배운 개념을 바탕으로 넓이로 접근해보자.

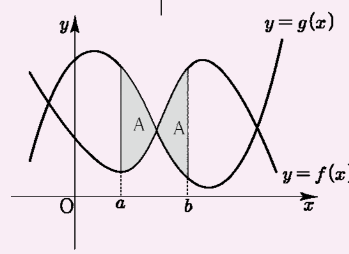
곡선 $y=f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx = \mathrm{A}$라 하면

$\int_0^1 f(x)dx = -\mathrm{A}$이므로 $\int_{-1}^1 f(x)dx = \mathrm{A}-\mathrm{A}=0$이라고

볼 수도 있다. 즉, A에서 A만큼의 넓이가 상쇄되니 0이 된다.

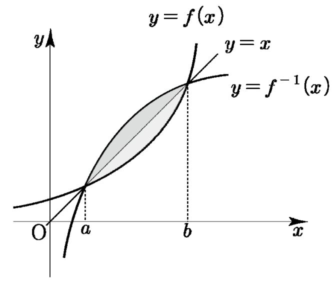


이와 마찬가지로 만약 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 이루어진 두 부분의 넓이가 서로 같을 때, $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \mathrm{A}-\mathrm{A}=0$이다.



개념 파악하기 (5) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이

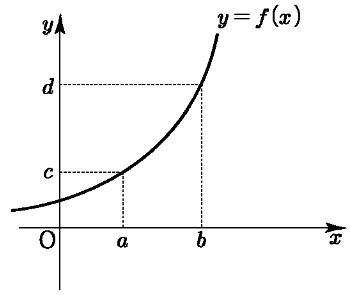


함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S는
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$사이의 넓이의 2배이다. (대칭성 활용)

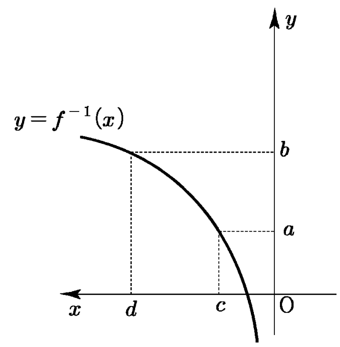
$$S=\int_a^b |f(x)-f^{-1}(x)|\,dx=2\int_a^b |x-f(x)|\,dx$$

Tip 역함수를 직접 구해서 적분하는 것이 아니라 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$ 사이의 넓이를 2배하여 계산하는 것이 핵심이다. (by 대칭성)

함수 $y=f(x)$의 그래프로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 해석하기



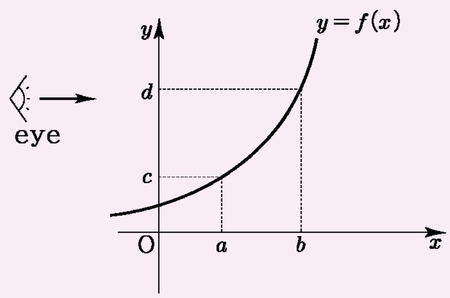
오른쪽 그림과 같이 증가함수 $y=f(x)$가
$f(a)=c$, $f(b)=d$일 때, a, b를 역함수로 표현하면?
단순히 x좌표와 y좌표를 서로 바꾸어 일차원적으로
$f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$라고 할 수도 있다.



이와 달리 그래프로 접근하는 방법을 알아보자.
$y=f(x)$를 $y=x$에 대하여 대칭시키면 $y=f^{-1}(x)$가 되는 것을 알고 있다.
즉, x대신 y를 넣고 y대신 x를 넣어서 역함수를 구할 수 있다.
여기서 아이디어를 얻어 x축을 y축으로 보고 y축을 x축으로 봐도 된다.
이를 이행하려면 시계반대방향으로 90° 회전을 시켜주기만 하면 된다.
즉, 너무나 자명하게 $y=f^{-1}(x)$에 $x=c$, $x=d$를 대입하면 함숫값이
$f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$가 된다는 것을 바로 알 수 있다.

Tip 1 실제 $y=x$에 대하여 대칭시켜서 역함수를 구하면 오른쪽 그림에서 좌우 반전된 그림이 나온다. 시계 반대 방향으로 90° 만큼 회전시켰기에 x축이 오른쪽에서 왼쪽으로 증가하기 때문이다. 정확한 그래프 개형이 중요한 것이 아니라 $y=f^{-1}(x)$에 $x=c$, $x=d$를 대입하면 함숫값이 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$가 된다는 사실이 중요하다.

Tip 2 실전에서는 아래와 같이 옆에서 바라본다고 생각하면 된다.



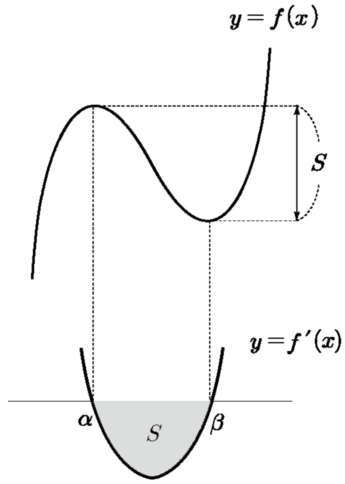
개념 파악하기 (6) $f'(x)$의 넓이와 $f(x)$의 함숫값의 차이는 어떤 관계가 있을까?

$f'(x)$의 넓이와 $f(x)$의 함숫값의 차이

$y=f'(x)$와 x축과 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{-f'(x)\}dx=[-f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$=-f(\beta)-(-f(\alpha))=f(\alpha)-f(\beta)$

즉, 극값차가 S이다. $f'(x)$의 넓이는 $f(x)$의 함숫값의 차이와 같다.
$f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 감소한다.
이때 얼마만큼 감소할까? 넓이 S만큼 감소한다. (p180 참고)



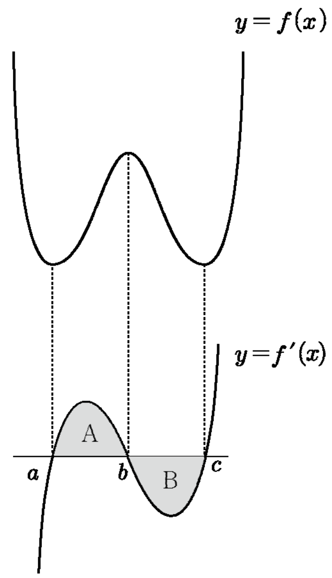
$f'(x)$의 넓이 차이에 따른 $f(x)$의 그래프 개형

$\mathrm{A}=\int_{a}^{b}|f'(x)|dx,\quad \mathrm{B}=\int_{b}^{c}|f'(x)|dx$라 하면

A와 B의 대소관계에 따라 $f(x)$의 그래프 개형은 달라진다.

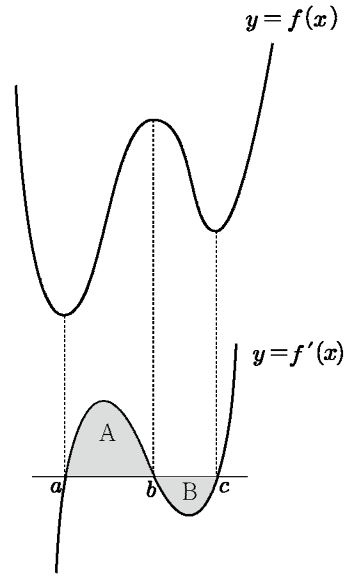
① $\mathrm{A}=\mathrm{B}$

$\int_{a}^{c}f'(x)dx=f(c)-f(a)=0 \Rightarrow f(a)=f(c)$



② $\mathrm{A}>\mathrm{B}$

$\int_{a}^{c}f'(x)dx=f(c)-f(a)>0 \Rightarrow f(c)>f(a)$



예제 7

좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서 속도가 $v(t)=2-t$일 때, 다음을 구하시오.

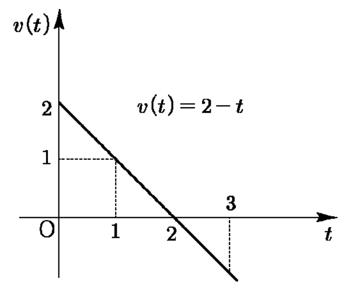
(1) 시각 $t=3$에서 점 P의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

풀이

풀이1) $v(t)$를 활용하는 방법



(1) $1+\int_0^3 (2-t)dt = 1+\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3 = \frac{5}{2}$

(2) $\int_1^3 (2-t)dt = \left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^3 = 0$

(3) $\int_1^3 |2-t|dt = \int_1^2 (2-t)dt + \int_2^3 (-2+t)dt = \left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 + \left[-2t+\frac{1}{2}t^2\right]_2^3 = 1$

Tip 무조건 공식을 외우지 말고 $v(t)=2-t$의 그래프를 그려서 판단하는 편이 좋다. 즉, 이해를 하자!
괜히 적분단원에 있을 리가 없다! 앞에서 배운 것과 완벽하게 똑같다.
얼마만큼 증가하나? 도함수의 넓이만큼 증가한다! 얼마만큼 감소하나? 도함수의 넓이만큼 감소한다!

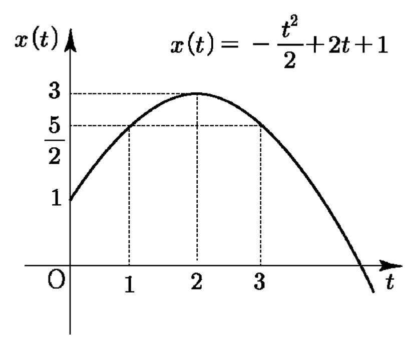
(1) 처음 좌표가 1이라고 했다. 0에서 2초까지 위치는 $\int_0^2 v(t)dt$만큼 증가하고 2에서 3초까지 위치는 $\int_2^3 -v(t)\,dt$만큼 감소한다. 즉, $1+\int_0^2 v(t)dt - \int_2^3 -v(t)\,dt = 1+\int_0^3 v(t)dt$와 같다.

(2) $v(t)$ 그래프를 보면 $\int_1^2 |v(t)|\,dt = \int_2^3 |v(t)|\,dt$이므로 위치의 증가와 감소량이 서로 같다.
따라서 0이다.

(3) 움직인 거리이므로 감소량과 증가량을 모두 더해야 하므로 $\int_1^3 |v(t)|dt$를 계산하면 된다.

풀이2) $x(t)$를 활용하는 방법

공식을 쓰지 않고 적분상수 C를 찾고 $x(t)$를 직접 구해도 된다.



(1) $v(t)$의 부정적분 $x(t)=2t-\frac{t^2}{2}+C$, $x(0)=1$

$\Rightarrow x(t)=-\frac{t^2}{2}+2t+1 \Rightarrow x(3)=\frac{5}{2}$

(2) $x(t)=-\frac{t^2}{2}+2t+1 \Rightarrow x(1)=x(3)=\frac{5}{2}$ 이므로 $x(3)-x(1)=0$

(3) $x(t)=-\frac{t^2}{2}+2t+1$이므로 $x(2)-x(1)=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$, $x(2)-x(3)=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$이므로

이동거리는 $\{x(2)-x(1)\}+\{x(2)-x(3)\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이다.

073 | 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\quad g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30\times S$의 값을 구하시오. [4점]

074 | 2023학년도 수능 공통

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le t\le 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t\ge 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

075 | 2021년 고3 7월 교육청 공통

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-6t$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

076 | 2022학년도 수능예비시행

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가 $a(t)=3t^2-12t+9\ (t\ge 0)$이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 구간 $(3,\ \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.
ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0,\ \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

따라서 $\lim_{t\to1}\dfrac{f(t)-2t}{t-1}=\lim_{t\to1}\dfrac{2t^2-2t}{t-1}=\lim_{t\to1}\dfrac{2t}{1}=2$이다.

답 ③

Tip 삼각형의 무게중심은 출제자 입장에서 굉장히 매력적인 소재이다.

<삼각형의 무게중심>

① 삼각형의 중선

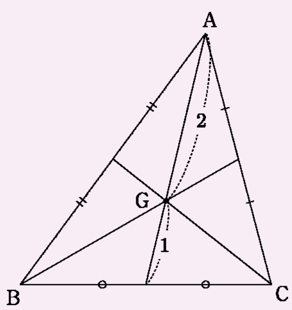
$\Rightarrow$ 삼각형에서 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분

② 삼각형의 무게중심

$\Rightarrow$ 삼각형의 세 중선의 교점

③ 삼각형의 무게중심의 성질

$\Rightarrow$ 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 $2:1$로 나눈다.



④ 삼각형의 무게중심과 넓이

$\Rightarrow$ $\triangle ABG=\triangle BCG=\triangle CAG=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$

⑤ $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$, $C(c_1,\ c_2)$일 때,

삼각형 ABC의 무게중심은

$G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$이다.

074

점 A는 $y=-x^2+6$과 $y=x$의 교점이므로

$-x^2+6=x \Rightarrow x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=2$ ($\because$ 제 1사분면 위의 점)

$A(2,\ 2)$, $B(2,\ 0)$, $P(a,\ a) \Rightarrow Q(2,\ a)$

$\overline{PQ}=2-a$, $\overline{PR}=-a^2+6-a=-(a+3)(a-2)$

$$\lim_{a\to2-}\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}=\lim_{a\to2-}\frac{-(a-2)}{-(a+3)(a-2)}=\lim_{a\to2-}\frac{1}{a+3}=\frac{1}{5}$$

답 ②

075

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=4$

n에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $n=1$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$이므로

$f(x)=4x^3+3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$

$\lim_{x\to0}x=0 \Rightarrow \lim_{x\to0}(4x^3+3x^2+ax+b)=0 \Rightarrow b=0$

$\lim_{x\to0}\dfrac{4x^3+3x^2+ax}{x}=a=4$

$f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로 $f(1)=11$이다.

② $n=2$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$이므로

$f(x)=10x^3+ax^2+bx+c$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=4$

분모의 x^2이 약분되어야 하므로

함수 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지고 있어야 한다.

즉, $f(x)=10x^3+ax^2$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\dfrac{10x^3+ax^2}{x^2}=a=4$

$f(x)=10x^3+4x^2$이므로 $f(1)=14$이다.

③ $n\geq3$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$이므로

$f(x)=6x^{n+1}+ax^n+\cdots$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=4$

분모의 x^n이 약분되어야 하므로

함수 $f(x)$는 x^n을 인수로 가지고 있어야 한다.

즉, $f(x)=6x^{n+1}+ax^n$

삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{5}{2}=m$

이므로 $10m=25$이다.

답 25

Tip <신발끈 공식>

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표를 알면 신발끈 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형의 세 꼭짓점의 좌표가
$(a,\ b),\ (c,\ d),\ (e,\ f)$일 때,
삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} a & c & e & a \\ b & d & f & b \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|ad+cf+eb-(cb+ed+af)|$$

ex A$(-1,\ 1)$, B$(-2,\ 3)$, P$(1,\ 2)$일 때, 삼각형 ABP의 넓이 S를 구하시오.

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right|$$

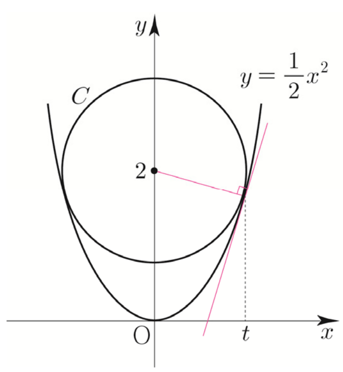
$$=\frac{1}{2}|-3-4+1-(-2+3-2)|$$

$$=\frac{1}{2}|-5|=\frac{5}{2}$$

038

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$라 하면 $f'(x)=x$

접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면
두 점 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기와
$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.



$$\frac{\frac{1}{2}t^2-2}{t-0}\times t=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}\ \ (\because t>0)$$

$$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right) \Rightarrow (\sqrt{2},\ 1)$$

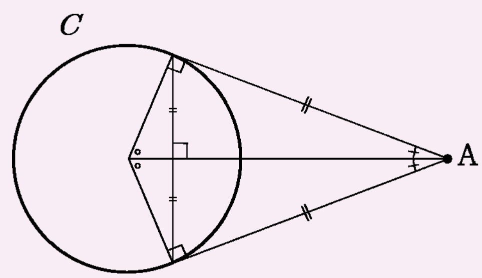
두 점 $(\sqrt{2},\ 1)$, $(0,\ 2)$사이의 거리가 원 C의 반지름 r이므로 $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(1-2)^2}=\sqrt{3}$이다.

원 C의 넓이는 3π이므로 $a=3$이다.

답 3

Tip 원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선은 문제를 풀어나가는 key point일 때가 많다.
즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나이다.

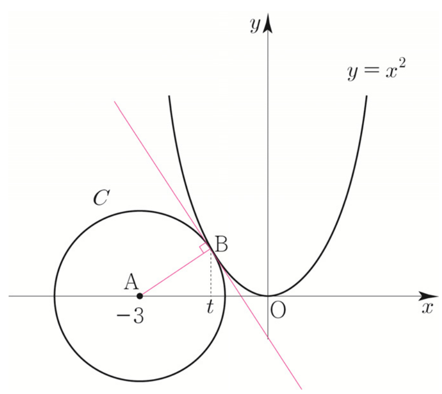
아래 그림과 같이 점 A에서 원 C에 접선을 그었을 때, 그어야하는 보조선은 다음과 같다.



자주 출제되는 도형이니 반드시 기억하자.

039

반지름의 길이가 r이고 중심의 좌표가 A$(-3,\ 0)$인 원 C와 곡선 $y=x^2$가 점 B에서 접한다.
점 B의 x좌표를 t라 하자.



두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(t,\ t^2)$를 지나는 직선의 기울기와 B$(t,\ t^2)$에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.

052

$f(x)=\frac{1}{6}x^3-ax^2+4ax$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-2ax+4a$

실수 전체의 집합에서 증가하려면
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$\frac{1}{2}x^2-2ax+4a=0$
판별식을 사용하면

$\frac{D}{4}\le 0 \Rightarrow a^2-2a\le 0 \Rightarrow a(a-2)\le 0$

$\Rightarrow 0\le a\le 2$
$M=2,\ m=0$이므로 $M+m=2$이다.

답 2

Tip 왜 판별식을 쓸까?

<생략된 사고과정>

① 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$
② $=y$를 붙여서 함수로 해석하면 $y=f'(x)$는 x축과 접하거나 x축 위에 있어야 한다.
③ 판별식 $D\le 0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 중근을 갖거나 서로 다른 두 개의 허근을 갖는다.
즉, $y=f'(x)$와 x축이 접하거나 만나지 않아야 한다.
④ $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수 $\frac{1}{2}$이므로
$y=f'(x)$가 x축과 접하면
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

$y=f'(x)$가 x축과 만나지 않으려면
x축 위에 있어야 하므로
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

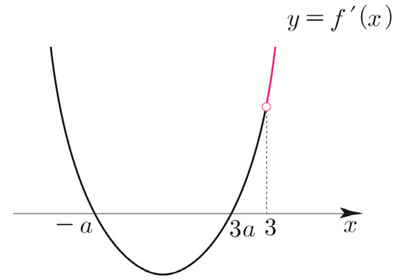
053

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x$

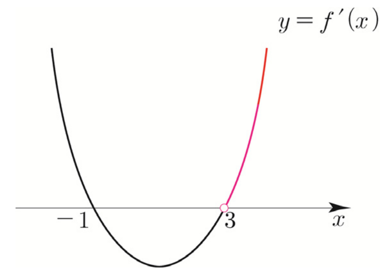
$f'(x)=x^2-2ax-3a^2=(x-3a)(x+a)$

$3<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여
$f(x_1)<f(x_2)$이므로 $x>3$에서 $f(x)$가 증가한다.
즉, $x>3$에서 $f'(x)\ge 0$

$a>0$이므로 $f'(x)$를 그리면



조건을 만족하려면 $3a<3$이어야 하므로 $a<1$이다.
위와 같은 그림은 직관적으로 당연하게 받아들일 수 있지만
만약 $3a=3$일 때에도 조건을 만족시킬 수 있을까?



$3a=3 \Rightarrow a=1$이어도 조건을 만족시킨다.
$0<a\le 1$이므로 a의 최댓값은 1이다.

답 1

Tip 항상 경계를 조심해야 한다.
a가 자연수나 정수일 때, a의 개수나 합을
물어보는 문제에서 특히 조심해야 한다.

위 문제에서는 $a=1$일 때가 경계가 되는데
$a=1$인 상황을 그려보고 특히 유의하면서 판단하면 된다.

054

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2-4x+1$

$f'(x)=-x^2+kx-4$
$f(x)$의 역함수가 존재하려면 실수 전체에서 감소함수나
증가함수이어야 한다.
$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 감소함수이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$를 만족시키면 된다.
판별식을 사용하면
$D\le 0 \Rightarrow k^2-16\le 0 \Rightarrow (k+4)(k-4)\le 0$

$\Rightarrow -4\le k\le 4$
따라서 정수 k의 개수는 9이다.

답 9

084

$\mathrm{P}\left(x,\ \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4}{2}+x^2-4x+4}$

$f(x)=\frac{x^4}{2}+x^2-4x+4$라 하면

$f'(x)=2x^3+2x-4=2(x^3+x-2)$

$=2(x-1)(x^2+x+2)$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+2>0$이므로

Semi 도함수는 $(x-1)$이다.

(실질적으로 부호에 영향을 주는 도함수를 Semi 도함수라 하기로 Guide step에서 약속함)

$f(x)$는 $x=1$에서 최소이고 최솟값은 $f(1)=\frac{3}{2}$

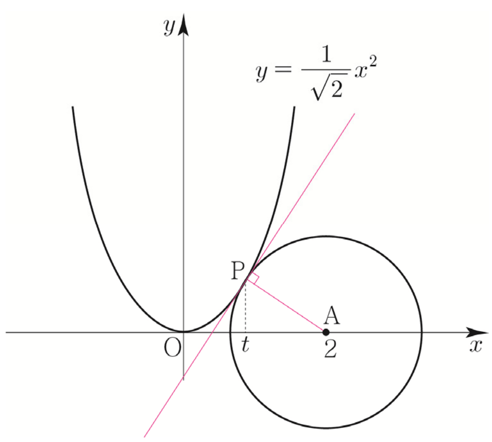
이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값은 $\sqrt{\frac{3}{2}}=m$이다.

따라서 $10m^2=15$이다.

답 15

다르게 풀어보자.

한 점에서 거리가 같은 점들의 집합은 원이다.
즉, 점 A(2, 0)을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 점점 키웠을 때, 곡선 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$에 접하는 순간 $\overline{\mathrm{AP}}$는 최소이다.



P의 x좌표를 t라 하면 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)$

직선 AP의 기울기는 점 P에서의 접선의 기울기와 수직이므로

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t^2}{t-2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}t=-1 \Rightarrow t^3+t-2=0$$

$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Rightarrow t=1$

따라서 $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때,

$\overline{\mathrm{AP}}$은 최솟값은 $\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$이다.

Tip 원은 거리를 나타내는 틀이다.

085

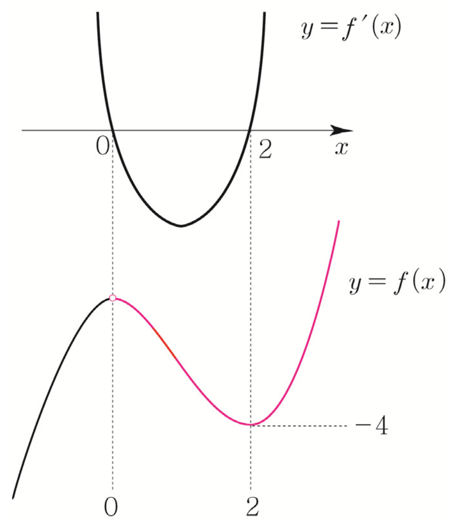
$y=\frac{1}{4}x^4-x^3+2\ \ (x>0)$

$y'=x^3-3x^2\ \ (x>0)$

$f(x)=x^3-3x^2\ \ (x>0)$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$x>0$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=-4$이다.

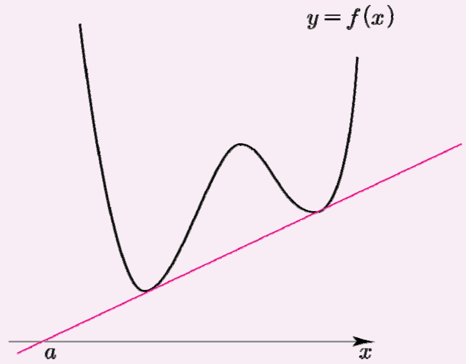
곡선 $y=\frac{1}{4}x^4-x^3+2\ \ (x>0)$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 최소이다.

점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$y=-4(x-2)-2 \Rightarrow y=-4x+6$

Tip 접선의 개수 = 접점의 개수?

접선의 개수와 접점의 개수가 반드시 같은 것은 아니다.
예를 들어 $f(x)$가 사차함수일 때, 아래와 같은 경우가 가능하다.



즉, 접점이 2개여도 접선이 1개일 수 있다.

하지만 $f(x)$가 삼차함수라면 위와 같은 경우가 발생하지 않으므로 접선의 개수와 접점의 개수는 같다.
(이때, 접점의 개수는 접점의 x좌표의 개수로 판단할 수 있다.)

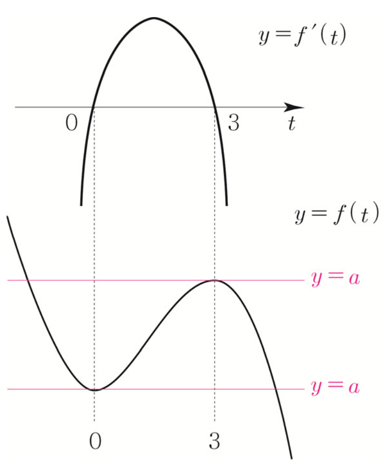
그렇기 때문에 보통 접선의 개수를 물어보는 문제는 $f(x)$가 삼차함수인 경우가 대부분이다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=3t^2(x-t)+t^3-4$

접선이 점 $(3,\ a)$을 지나므로
$a=3t^2(3-t)+t^3-4=-2t^3+9t^2-4$

$f(t)=-2t^3+9t^2-4$라 하면
$f'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$a=f(0)=-4$ or $a=f(3)=23$
a는 양수이므로 23이다.

답 23

102

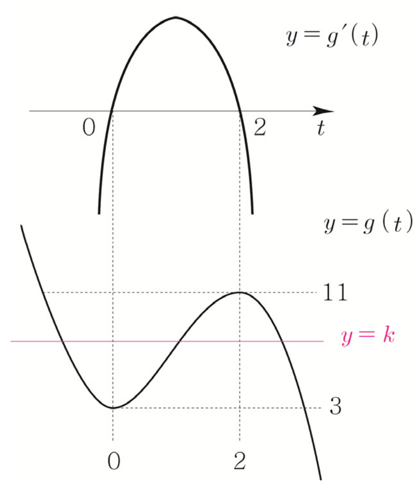
101번에서 배웠듯이 삼차함수이므로
접점의 개수와 접선의 개수는 동일하다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=(3t^2-12t+3)(x-t)+t^3-6t^2+3t+3$

접선이 $(0,\ k)$를 지나므로
$k=-2t^3+6t^2+3$

$g(t)=-2t^3+6t^2+3$라 하면
$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$
$g(0)=3,\ g(2)=11$

$g'(t)$를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$k<3$ or $k>11 \Rightarrow f(k)=1$
$f(3)=f(11)=2$
$3<k<11 \Rightarrow f(k)=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} f(k)=1\times6+2\times2+3\times7=31$이다.

답 31

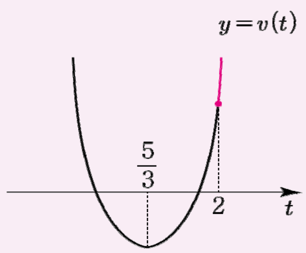
Tip <범위가 있을 때, 판별식 유의사항>

아마 판별식 $D \le 0$이라고 푼 학생이 있을 수 있다.
이 문제에는 범위가 $t \ge 0$이기 때문에
$t=\frac{5}{3}$를 포함하므로 판별식 $D \le 0$을 써도 맞지만
만약 범위가 $t \ge 2$라면 판별식을 쓸 수 없다.

도대체 왜 그럴까?

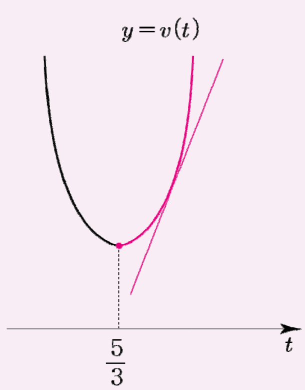
판별식은 단순 무식해서 정의역이 실수 전체라고 가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.
즉, 위 문제에서 판별식 $D \le 0$을 써도 괜찮은 이유는 $t \ge 0$인 경우 정의역이 실수 전체일 때와 마찬가지로 $v(t) \ge 0$가 성립하려면 t축에 접하거나 위로 붕 떠야하기 때문이다.

예를 들어 범위를 $t \ge 2$라 해보자.



위와 같은 그림일 때, 판별식을 쓰면 방정식 $v(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다고 알려주지만 실제로는 정의역이 $t \ge 2$이므로 실근을 갖지 않는다.

위에서 배운 내용을 적용시켜 보자.
만약 $v(t)$의 정의역이 $t \ge \frac{5}{3}$이고 기울기가 1인 직선 $f(t)$와 접한다고 했을 때,
방정식 $v(t)=f(t) \Rightarrow v(t)-f(t)=0$에서 판별식을 쓸 수 있을까?



정답은"쓸 수 있다"이다. $t \ge \frac{5}{3}$이지만 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

<요약>

1. 범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야 하고 함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.

2. 범위가 있어도 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 같다면 판별식을 쓸 수 있다.

149

$f(x)=x^3-2$라 하면
$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=3t^2(x-t)+t^3-2$

접선이 $(0,\ -4)$를 지나므로
$-4=-2t^3-2 \Rightarrow 2t^3=2 \Rightarrow t=1$

$y=3(x-1)-1 \Rightarrow y=3x-4$이
$(a,\ 0)$을 지나므로 $a=\frac{4}{3}$이다.

답 ②

150

$x(t)=2t^3-kt^2$

$v(t)=6t^2-2kt$

$v'(t)=12t-2k$

$v(1)=0 \Rightarrow 6-2k=0 \Rightarrow k=3$
따라서 가속도는 $v'(3)=36-6=30$이다.

답 30

151

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$
$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

함수 $f(x)$이 실수 전체의 집합에서 증가하려면
모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

$f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다고 학습하였다.

즉, 미분가능해야 증가하는 것이 아니라 위 조건만
만족시키면 그 구간에서 증가한다고 볼 수 있다.

다만 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때,
그 구간의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면
$f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 학습하였다.

만약 $f(x)$가 상수함수가 아닌 다항함수라면
$f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건
은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$
라고 학습하였다.

Tip2 위 풀이가 이해가 잘 안 된다면
아래 해설강의를 참고하도록 하자.

T2 158번 해설강의

https://youtu.be/bnmiT2Gp3D8

159

$x(t) = t^3 - 12t + k$
$v(t) = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$

$v(2) = 0$이고 $t = 2$에서 $v(t)$의 부호가 변하므로
점 P는 $t = 2$에서 운동 방향이 바뀐다.

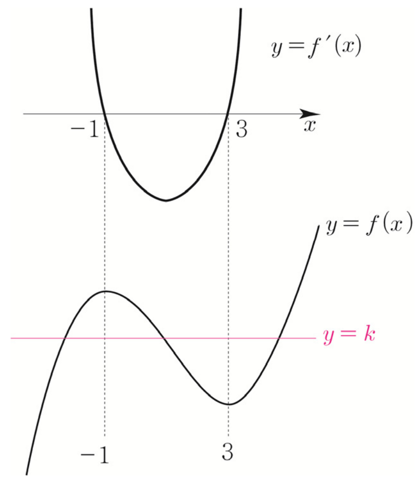
$x(2) = 8 - 24 + k = 0 \Rightarrow k = 16$

답 ④

160

$x^3 - 3x^2 - 9x - k = 0$
$x^3 - 3x^2 - 9x = k$
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$라 하면
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(3) < k < f(-1) \Rightarrow -27 < k < 5$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 최댓값은 4이다.

답 ②

161

$f(x) = x^3 - 5x$라 하면
$f'(x) = 3x^2 - 5$

$\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선의 방정식은
$y = -2(x-1) - 4 \Rightarrow y = -2x - 2$
$x^3 - 5x = -2x - 2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \ (\because\ x \neq 1)$
$\mathrm{B}(-2,\ 2)$이므로 선분 AB의 길이는
$\sqrt{(1+2)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$이다.

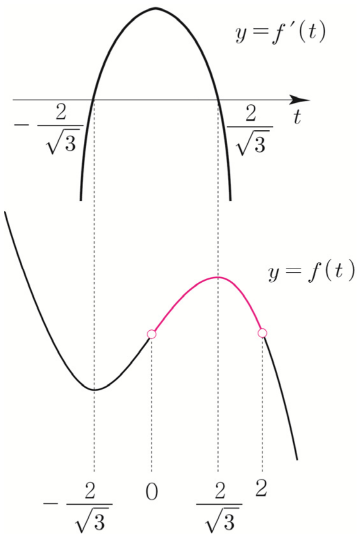
답 ④

근과 계수의 관계 Technique을 사용해서 풀어보자.

$x^3 - 3x + 2 = 0$
(x^2의 계수가 0이므로 근과 계수의 관계 Technique을 쓰면
유리하다.)

점 A가 접점이므로 $x = 1$을 중근으로 갖는다.
점 B의 x좌표를 t라 하면
$1 + 1 + t = 0$ (세 실근의 합 0)이므로 $t = -2$이다.

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$0 < t < 2$에서 $f(t)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{b}{a}\sqrt{3}$$

따라서 $a+b=11$이다.

답 11

Tip <만약 $t>2$이면 어떻게 될까?>

점 B의 y좌표는 $\frac{t^2}{4}+1$이므로 $t=2$일 때, 2이고

$t>2$일 때, y좌표는 2보다 크다.

B의 y좌표가 A의 y좌표보다 크기 때문에

$\overline{AB} = \frac{t^2}{4} - 1$이다.

따라서 만약 $t>0$라고 조건을 변경하면

선분 AB는 길이는 양수이므로 절댓값을 취해서

$\overline{AB} = \left|1 - \frac{t^2}{4}\right|$라고 해야 한다.

길이는 양수이므로 **절댓값**을 취해줘야 한다.

이를 항상 유의하도록 하자.

172

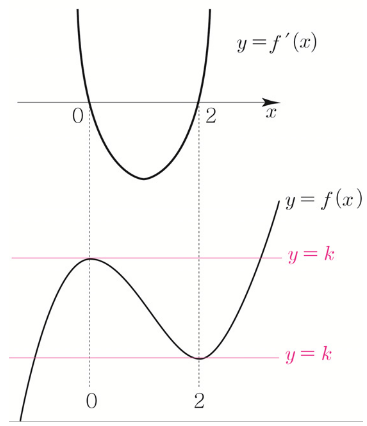
$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 2x + k$

$x^3 - 3x^2 - 3 = k$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$라 하면

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$k = f(0) = -3$ or $k = f(2) = -7$이므로

조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은 21이다.

답 21

173

(가) $g(x) = x^3 f(x) - 7$

(나) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-g(x)}{x-2} = 2$

$\lim_{x\to 2}(x-2) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\} = 0$

$\Rightarrow f(2) - g(2) = 0 \Rightarrow f(2) = g(2)$

($\because f(x)-g(x)$는 다항함수이므로 $x=2$에서 연속)

$h(x) = f(x) - g(x)$라 하면 $h(2) = 0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$

$= h'(2) = f'(2) - g'(2) = 2$

$g(x) = x^3 f(x) - 7$

$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$

$f(2) = g(2) \Rightarrow f(2) = 8f(2) - 7 \Rightarrow f(2) = 1$

$f'(2) - g'(2) = 2 \Rightarrow f'(2) - \{12f(2) + 8f'(2)\} = 2$

$\Rightarrow -7f'(2) = 14 \Rightarrow f'(2) = -2$

$f(2) = 1,\ f'(2) = -2 \Rightarrow g(2) = 1,\ g'(2) = -4$

이므로 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의

접선의 방정식은 $y = -4(x-2)+1 \Rightarrow y = -4x+9$

따라서 $a^2 + b^2 = 16 + 81 = 97$이다.

답 97

$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 1 \Rightarrow 3\overline{DB} = \overline{AD}$ 이므로

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{CD}}{3\overline{DB}} = \dfrac{1}{3} \times 6 = 2$이다.

$f'(a) = 2$이므로 $-3a^2 + 8a - 3 = 2 \Rightarrow 3a^2 - 8a + 5 = 0$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값들의 곱은 $\dfrac{5}{3}$이다.

답 ⑤

189

최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$

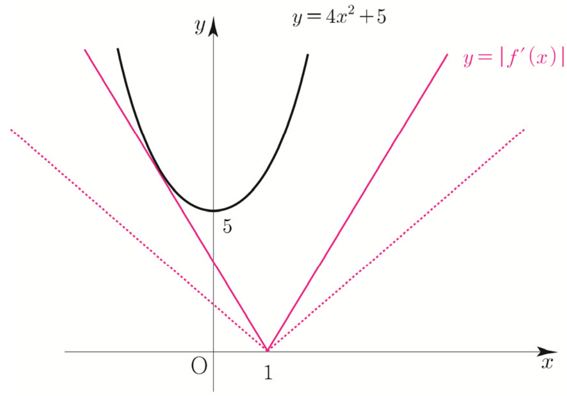
$y = f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x = 1$이므로

$f(x) = a(x-1)^2 + C$

$f'(x) = 2a(x-1)$

모든 실수 x에서 $|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$이므로

$y = |f'(x)|$, $y = 4x^2 + 5$의 그래프를 그리면



a의 최댓값을 구하는 것이므로 $a > 0$일 때라고 가정하고 답을 구해보자.

$y = |2a(x-1)|$는 a에 관계없이 $(1,\ 0)$을 지나고

a가 커지면 커질수록 기울기가 가팔라진다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $|2a(x-1)| \leq 4x^2 + 5$를

만족시키면서 실수 a가 최대일 때는

$y = -2a(x-1)$와 $y = 4x^2 + 5$와 접할 때이다.

$g(x) = 4x^2 + 5$ 라 하면

$g'(x) = 8x$

접점의 x좌표를 t라 하면

$g'(t) = -2a \Rightarrow 8t = -2a \Rightarrow t = -\dfrac{1}{4}a$

$g(t) = -2a(t-1) \Rightarrow 4t^2 + 5 = -2a(t-1)$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{4} + 5 = -2a\left(-\dfrac{1}{4}a - 1\right)$

$\Rightarrow a^2 + 8a - 20 = 0$

$\Rightarrow (a+10)(a-2) = 0$

$\Rightarrow a = 2 \ (\because \ a > 0)$

답 ②

조건을 만족시키는 실수 a의 범위를 구해보자.

① $a > 0$일 때

$0 < a \leq 2$이면 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a = 0$일 때

$0 \leq 4x^2 + 5$이므로 마찬가지로 주어진 조건을 만족시킨다.

③ $a < 0$일 때

포인트는 $a < 0$일 때인데 $y = |2a(x-1)|$이므로

a의 절댓값만 같으면 $a < 0$ 와 $a > 0$는

서로 같은 그래프가 그려진다.

예를 들어

$a = 1 \Rightarrow y = |2(x-1)|$

$a = -1 \Rightarrow y = |-2(x-1)| = |2(x-1)|$

즉, $a < 0$일 때는 $-2 \leq a < 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 범위를 구하면

$-2 \leq a \leq 2$이다.

다른 방법으로 구해보자.

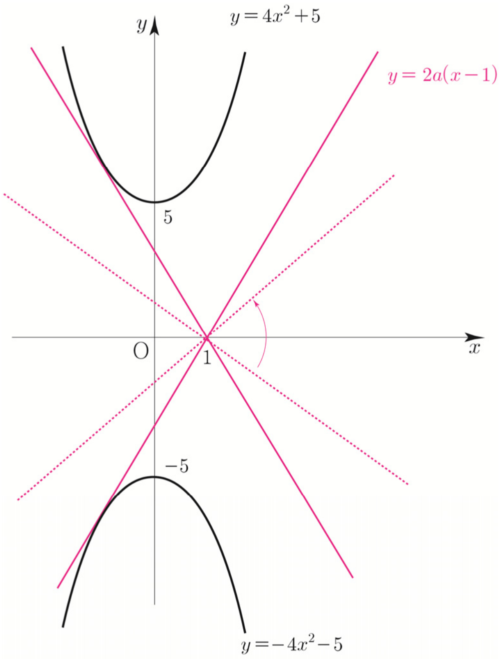
$|f'(x)| \leq 4x^2 + 5 \Rightarrow -4x^2 - 5 \leq f'(x) \leq 4x^2 + 5$

$\Rightarrow -4x^2 - 5 \leq 2a(x-1) \leq 4x^2 + 5$

직선 $y = 2a(x-1)$는 a와 관계없이 항상 지나는 정점이

$(1,\ 0)$이고 기울기가 $2a$인 일차함수로 해석할 수 있다.

즉, 점 $(1,\ 0)$을 고정시켜 빙글빙글 돈다고 볼 수 있다.



a의 최대는 $a>0$일 때, $y=-4x^2-5$와 접할 때이고
a의 최소는 $a<0$일 때, $y=4x^2+5$와 접할 때이다.

첫 번째 풀이처럼 접점을 이용하여 풀어도 되고
이차함수이니 판별식으로 풀어도 된다.
이번에는 판별식으로 풀어보자.

① $a>0$일 때

$2a(x-1)=-4x^2-5$

$\Rightarrow 4x^2+2ax-2a+5=0$

$\frac{D}{4}=a^2+8a-20=0$

$\Rightarrow (a+10)(a-2)=0 \Rightarrow a=2 \ (\because a>0)$

② $a<0$일 때

$2a(x-1)=4x^2+5$

$\Rightarrow 4x^2-2ax+2a+5=0$

$\frac{D}{4}=a^2-8a-20=0$

$\Rightarrow (a-10)(a+2)=0 \Rightarrow a=-2 \ (\because a<0)$

따라서 조건을 만족시키는 a의 범위는 $-2\le a\le 2$이다.

190

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

$f(x)=-x+t \Rightarrow x^3+x=t$

$h(x)=x^3+x$라 하면

$h'(x)=3x^2+1>0$이므로 $h(x)$는 증가함수이다.

곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이므로

$g(t)=1$이다. 따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.

$f(x)=-x+1 \Rightarrow f(x)+x=1$

$h(x)=f(x)+x$라 하면 $h(x)$는 삼차함수이고

$y=1$과 두 점에서 만나려면 Guide step에서 배운

삼차함수 ①번 개형이 나와야 한다.

(삼차함수 ①번 개형 = 극값이 존재하는 개형)

$y=h(x)$와 $y=t$가 서로 다른 세 점에서 만나도록

하는 실수 t가 존재하므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

$f(x)+x=t$

$h(x)=f(x)+x$라 하면

$h(x)=t$

$g(t)$가 상수함수이려면 $h(x)$는 증가함수 or 감소함수

이어야 한다.

① $h(x)$가 증가함수 ($f(x)$의 최고차항의 계수가 양수)

$h'(x)\ge 0 \Rightarrow f'(x)+1\ge 0 \Rightarrow f'(x)\ge -1$

방정식 $f'(x)=0$가 서로 다른 두 실근을 가질 수

있으므로 $f(x)$의 극값이 존재할 수 있다.

ex $f'(x)$의 최솟값이 $-\frac{1}{2}$인 경우

② $h(x)$가 감소함수 ($f(x)$의 최고차항의 계수가 음수)

$h'(x)\le 0 \Rightarrow f'(x)+1\le 0 \Rightarrow f'(x)\le -1$

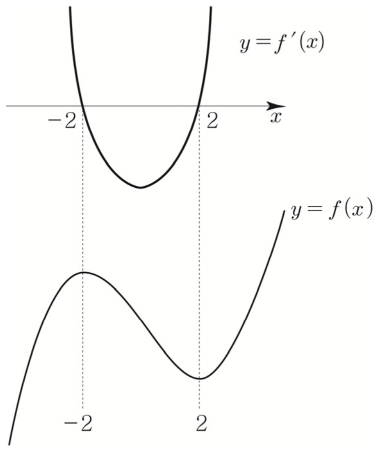
방정식 $f'(x)=0$의 실근이 존재하지 않으므로

$f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

극값이 존재할 수도 있고 안할 수도 있으므로 ㄷ은 거짓이다.

답 ③

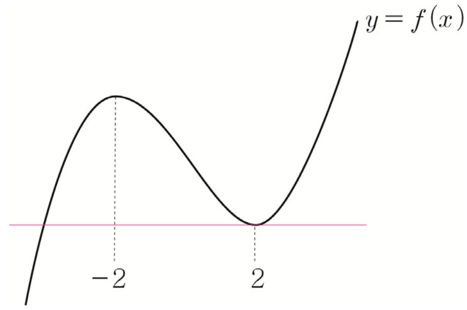
Tip 문제 조건에 $f(x)$의 최고차항의 계수가
나와 있지 않으면 음수인 경우도 고려해야 한다.



ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

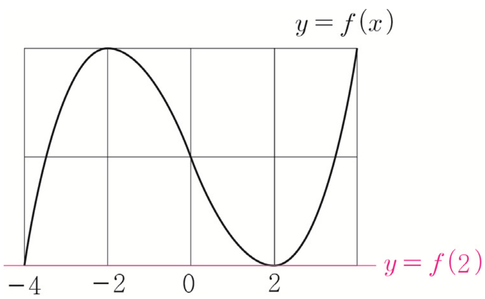
$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로
$f'(x)$의 최고차항의 계수도 양수이다.
$f'(x)$의 대칭축이 $x=0$이므로
$f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(2)$가 서로 다른
두 점에서 만나므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의
접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.



$f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면
$f(x)-f(2)=a(x-2)^2(x+4)$ (식세우기 Technique)
$f(x)=a(x^3-12x+16)+f(2)$
점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식을
$y=mx+n$이라 하자.

$f(x)=mx+n \Rightarrow f(x)-mx-n=0$
즉, 방정식 $f(x)-mx-n=0$은
$x=-1$에서 중근을 갖는다.

$f(x)-mx-n=0$
$f(x)=a(x^3-12x+16)+f(2)$이므로
$a(x^3-12x+16)+f(2)-mx-n=0$

다른 하나의 실근을 b라 하고
근과 계수의 관계 Technique을 사용하면
$-1-1+b=0 \Rightarrow b=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의
접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지나므로
ㄷ은 참이다.

답 ⑤

Tip <삼차방정식의 근과 계수의 관계 응용>

도함수의 활용 Training 1step 015번 문제 해설에서
배운 내용을 다시 복습해보자.

방정식 $f(x)=f(2)$과 방정식 $f(x)=mx+n$의
실근의 합은 같다. 우변을 좌변으로 넘겼을 때,
x^2의 계수에 영향을 주지 못하기 때문이다.
이를 이용하면 식세우기 Technique을 사용하지
않아도 된다.
방정식 $f(x)=f(2)$의 실근의 합이 $2+2-4=0$이므로
$f(x)=mx+n$의 실근의 합은 $-1-1+b=0$이다.
따라서 $b=2$이다.

204

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$
$g(x)=f(x)+|f'(x)|$

(가) $f(0)=g(0)=0$
$g(x)=f(x)+|f'(x)|$의 양변에 $x=0$을 대입하면
$g(0)=f(0)+|f'(0)| \Rightarrow f'(0)=0$

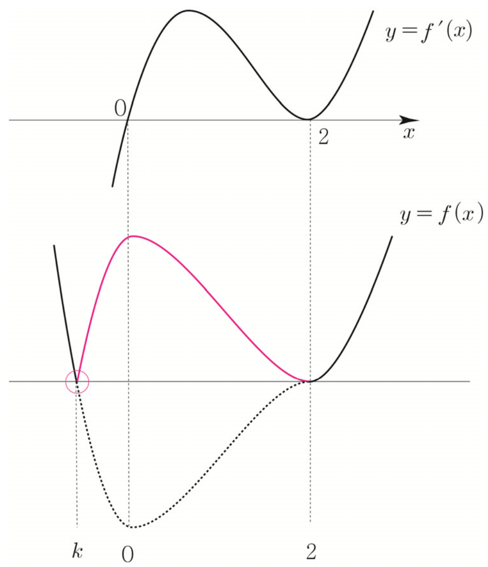
$f(x)=x^3+ax^2+bx$라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f'(0)=0 \Rightarrow b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2=x^2(x+a)$, $\quad f'(x)=x(3x+2a)$

ㄷ. 함수 $|f(x)-f(2)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이다.

$f(x)-f(2)$에 $x=2$를 대입하면 함숫값이 0이므로 $y=f(x)$의 그래프에서 직선 $y=f(2)$를 x축이라고 생각하고 $y=f(2)$ 아래에 있는 부분을 접어 올려서 함수 $|f(x)-f(2)|$의 그래프를 그릴 수 있다.

함수 $|f(x)-f(2)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으려면 $a=2$이어야 한다. ($\because$ case분류를 통한 소거)
$f'(x)=x(x-2)^2$



$x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이므로 ㄷ은 참이다.

답 ③

도함수의 활용 | Master step

208	31	229	105
209	108	230	39
210	④	231	42
211	④	232	③
212	①	233	51
213	10	234	④
214	⑤	235	36
215	③	236	38
216	④	237	147
217	④	238	65
218	160	239	19
219	④	240	61
220	①	241	108
221	⑤	242	9
222	②	243	5
223	④	244	35
224	④	245	14
225	32	246	②
226	⑤	247	19
227	243	248	58
228	⑤	249	13

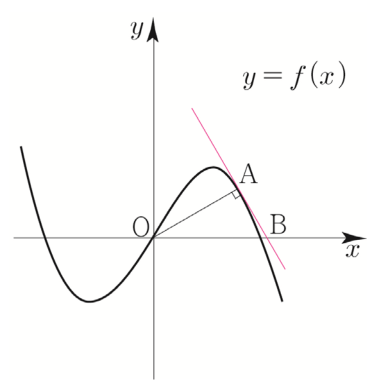
해설

208

$f(x)=-\sqrt{3}x^3+\sqrt{3}x$

$f'(x)=-3\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}=-3\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a,\ f(a))$에서의 접선을 l
원점 O와 직선 l 사이의 거리가 직선 OA의 길이와 같으려면 직선 OA의 기울기와 직선 l의 기울기가 수직이어야 한다.



$\frac{f(a)}{a}\times f'(a)=-1$

$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}a^3+\sqrt{3}a}{a}\times(-3\sqrt{3}a^2+\sqrt{3})=-1$

$\Rightarrow 3(a^2-1)(3a^2-1)=-1 \Rightarrow 9a^4-12a^2+4=0$

$\Rightarrow (3a^2-2)^2=0 \Rightarrow a^2=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ or $a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$f(x)$는 기함수이므로 원점에 대하여 대칭되어 있다.

따라서 $a=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때와 $a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때 삼각형 OAB의 넓이는 서로 같다.

$a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 라 하면

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=-\sqrt{3}$ 이므로

$y=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow y=-\sqrt{3}x+\frac{4}{3}\sqrt{2}$

접선 l의 x절편은 $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ 이므로

$B\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, 0\right)$

삼각형 OAB의 넓이는

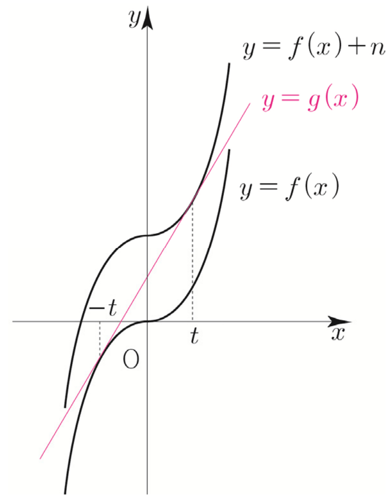
$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{9\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{27}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이므로

$p+q=31$이다.

답 31

209

함수 $f(x)=x^3$와 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x)+n$의 그래프와 모두 접하는 직선 $y=g(x)$



곡선 $y=f(x)+n$과 직선 $y=g(x)$가 접하는 접점의 x좌표를 t라 하면

접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접하는 접점의 x좌표를 T라 하면

접선의 기울기는 $f'(T)=3T^2$이다.

두 접선이 동일하므로 접선의 기울기가 서로 같다.

$f'(t)=f'(T) \Rightarrow 3t^2=3T^2 \Rightarrow T=-t\ (T\neq t)$

함수 $y=f(x)+n$ 위의 점 (t, t^3+n)에서의 접선의 방정식은

$y=3t^2(x-t)+t^3+n \Rightarrow y=3t^2x-2t^3+n$

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(-t, -t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y=3t^2(x+t)-t^3 \Rightarrow y=3t^2x+2t^3$

두 접선이 동일하므로 접선의 y절편이 서로 같다.

$-2t^3+n=2t^3 \Rightarrow 4t^3=n$

모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\leq 27$이 되려면

$g'(x)=3t^2$ 이므로

$3t^2\leq 27 \Rightarrow t^2\leq 9 \Rightarrow (t-3)(t+3)\leq 0$

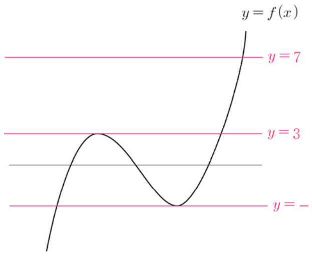
$\Rightarrow 0<t\leq 3\ (\because t>0)$

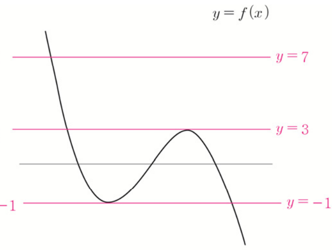
이면 된다.

즉, t에 대한 방정식 $4t^3=n$에서 실근 t가 $0<t\leq 3$이 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하면 된다.

$h(t)=4t^3$라 하고 $y=h(t)$를 그리면

① $a>0$ ② $a<0$





따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 3이고 극솟값은 -1이므로 극댓값과 극솟값의 합은 $3+(-1)=2$이다.

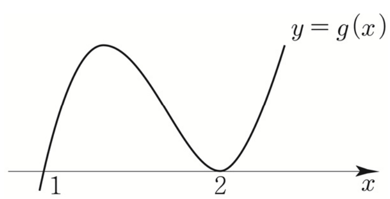
답 ①

213

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$
$g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고,
$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가진다.

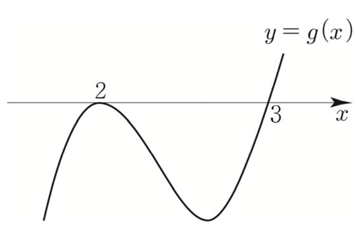
$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $g'(2)=0$
$g(x)=3(x-a)(x-b)^2$꼴이어야 하므로
$g'(2)=0$를 만족시키려면 $g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가져야 한다.
즉, $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ or $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

① $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$



$g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$



$g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.
즉, $f(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$$

$f'(0)=\dfrac{7}{3}=\dfrac{q}{p}$이므로 $p+q=10$이다.

답 10

Tip <숨겨진 조건 해석>

"$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가진다."
로 알려주고자 하는 조건은 다음과 같다.
① $g'(2)=0$ ② $x=2$에서 **극댓값**
즉, 두 조건 모두 사용되어야 한다.

출제자 입장에서 $g'(2)=0$만 알려주고자 했다면
극댓값보다는 극값을 갖는다고 했을 것이다.

이렇게 평가원은 한 조건($x=2$에서 극댓값)에
다른 조건($g'(2)=0$)을 숨겨서 제시하는 것을 좋아한다.

ex 함수 $g(x)=\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$라는 조건은
① $g(0)=0$ ② $g'(x)=xf(x)$
위 두 조건 말고도 ③ $g'(0)=0$이라는
숨겨진 조건도 내포하고 있다.
즉, 모든 조건은 이유가 있으니 조건을 꼼꼼히 해석하자.

214

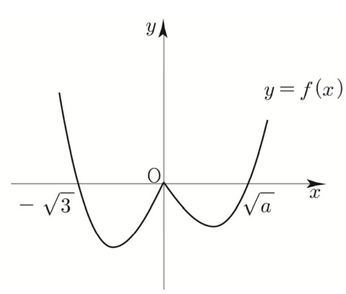
$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\ge 0) \end{cases}$$

a를 모르기 때문에 $f(x)$를 그리기 곤란하므로
a의 범위에 따라 case분류하면

① $a>0$

$$f(x)=\begin{cases} -ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x<0) \\ x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) & (x\ge 0) \end{cases}$$

이므로 $f(x)$를 그리면



$f(x)$는 $x = -\frac{n}{3}$에서 극댓값을 가지므로

$f\left(-\frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3}n \times \frac{16}{9}n^2 = \frac{32}{27}n^3 = a_n$

따라서 a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은 3이다.

답 ③

216

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y = (3t^2 + 2at + b)(x - t) + t^3 + at^2 + bt$

접선이 y축과 만나는 점을 P

$\mathrm{P}(0,\ -2t^3 - at^2)$이므로

$g(t) = \sqrt{(-2t^3 - at^2)^2} = |-2t^3 - at^2| = |2t^3 + at^2|$

(가) $f(1) = 2$

$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1$

(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

Tip <함수 $|h(x)|$의 미분가능성>

Q. 미분가능한 함수 $h(x)$에 대하여 함수 $|h(x)|$가 $x = k$에서 미분이 가능한지 가능하지 않은지 확인하려면 어떻게 해야 할까?

$h(k)$의 함숫값에 따라 크게 2가지 case가 존재한다.

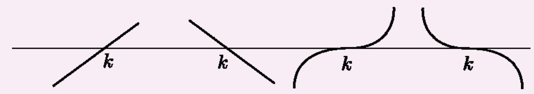
① $h(k) \neq 0$

$h(k) \neq 0$인 경우에는 미분가능한 함수를 x축 아래 부분을 접어 올리기만 하는 것이므로 실수 전체에서 미분가능하면 $h'(k)$도 당연히 존재한다.

② $h(k) = 0$

문제는 ② case인데 $h(k) = 0$일 때에는 case분류를 해줘야 한다.

i) $x = k$를 경계로 부호가 바뀔 때는 총 4가지의 개형이 가능하다.

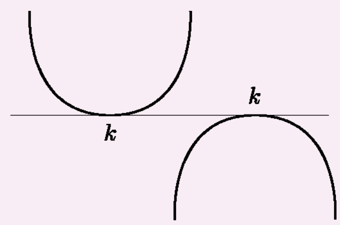


첫 번째와 두 번째 개형은 $h'(k) \neq 0$이므로 접어 올렸을 때 좌미분계수와 우미분계수가 같아질 수 없다. ($h'(k) = -h'(k) \Rightarrow h'(k) = 0$ 모순!)

결국 미분가능하려면 세 번째와 네 번째 개형과 같이 $h'(k) = 0$이어야 한다.

즉, $x = k$에서 뚫는 접선이 나와야 한다.

ii) $x = k$를 경계로 부호가 바뀌지 않을 때는 총 2가지 개형이 가능하다.



(애초에 $h(x)$가 실수 전체에서 미분가능하다고 했기 때문에 첨점(뾰족점)은 나올 수가 없다.)

결국 ② case에서 미분가능하려면

i), ii) 모두 $h'(k) = 0$이어야 한다.

$g(t) = \left|2t^2\left(t + \frac{a}{2}\right)\right|$

$h(t) = 2t^2\left(t + \frac{a}{2}\right)$라 하면

$h'(t) = 4t\left(t + \frac{a}{2}\right) + 2t^2$

$h\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$이고 $x = -\frac{a}{2}$에서 미분가능해야 하므로

$h'\left(-\frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow a = 0$

(물론 삼차함수 개형을 바탕으로 생각하면 $a = 0$인 것이 자명하다.)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

$a + b = 1$이고 $a = 0$이므로 $b = 1$이다.

$f(x) = x^3 + x$이므로 $f(3) = 30$이다.

답 ④

217

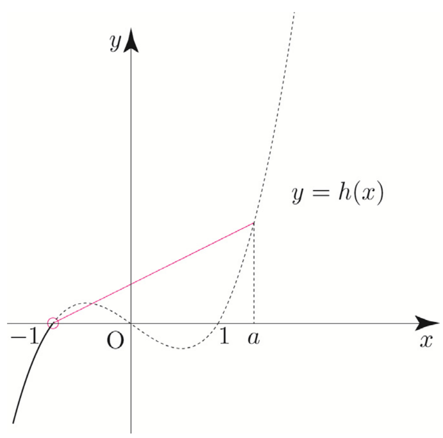
$f(x)=x^3-x$, 상수 $a\,(a>-1)$

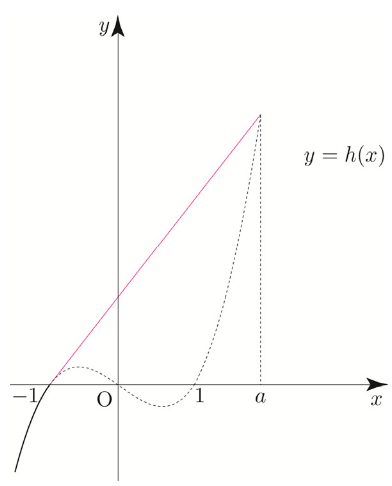
$y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선을 $y=g(x)$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

만약 아래와 같이 직선 $y=g(x)$의 기울기가 함수 $f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 0)$에서의 기울기와 같지 않으면 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않으므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다. 즉, 직선 $y=g(x)$는 함수 $f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 0)$에서의 접선과 같아야 한다.





training - 1step 015번 해설에서 배운 근과 계수의 관계 Technique을 적용시켜 a를 구해보자.

$f(x)=g(x)$

$\Rightarrow x^3-x-(px+q)=0 \Rightarrow x^3-(p+1)x-q=0$

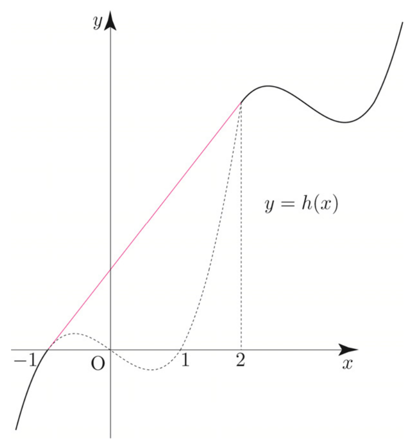
점 $(-1,\ 0)$에서 접하므로 위 방정식은 -1(접점의 x좌표)을 중근으로 갖는다. 다른 실근이 a이므로 세 근의 합을 구하면 $-1-1+a=0 \Rightarrow a=2$이다.

이번에는 $f(x-m)+n\ (x>2)$를 해석해보자.
함수 $f(x-m)+n$의 그래프는 함수 $f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

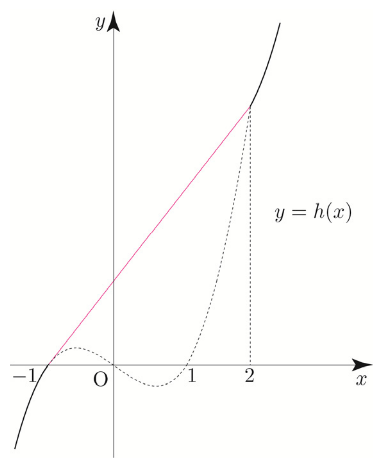
(가) 조건을 만족시키려면 $x=2$에서 미분가능해야 하므로 함수 $f(x-m)+n$ 위의 점 $(2,\ 6)$에서의 접선의 기울기가 함수 $f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기와 같아야 한다.
$f'(-1)=f'(1)$이므로 두 가지 case가 존재한다.

(나) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

① $f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 0)$이 $(2,\ 6)$으로 평행이동한 경우
(나) 조건을 만족시키지 않는다.



② $f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$이 $(2,\ 6)$으로 평행이동한 경우
(나) 조건을 만족시킨다.



따라서 $m=1,\ n=6$이므로 $m+n=7$이다.

답 ④

① $\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=0$

위 조건은 우미분계수와 좌미분계수가 둘 중에 하나만 0이면 되지만 함수 $f(t)$는 우미분계수와 좌미분계수 모두 0으로 같은 경우만 가능하다.
(두 개의 첨점빼고 다른 점에서는 미분가능하므로)

$f'(t)=0 \Rightarrow t=1-\sqrt{3}$ or $t=1$ or $t=1+\sqrt{3}$

② $\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}<0$

우미분계수와 좌미분계수의 부호가 서로 달라야 한다.
(미분가능하지 않은 점부터 조사하면 된다.)
방정식 $f(t)=0$의 근 중 서로 다른 두 실근의 합은 함수 $y=f(t)$의 그래프의 특징으로 빠르게 찾을 수 있다.
$y=f(t)$는 $t=1$에 대칭되어 있으므로 두 실근의 합은 $1\times2=2$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은
$1-\sqrt{3}+1+1+\sqrt{3}+2=5$이다.

답 ④

Tip <좌미분계수 × 우미분계수>

Q1. $\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$
이면 $x=a$에서 미분이 가능할까?

답은 "아니다"이다.
예를 들어 우미분계수가 0이고 좌미분계수가 1이면 조건을 만족시키지만 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

Q2. $\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$
의 조건은 $x=a$에서 미분가능하지 않다는 조건과 완벽히 동일할까?

답은 "아니다"이다. 좌미분계수와 우미분계수가 같을 수 없으므로 $x=a$에서 미분가능하지 않은 것은 맞지만 반드시 부호가 달라야 한다.
예를 들어 우미분계수가 1이고 좌미분계수가 2이면 $x=a$에서 미분가능하지 않지만
위 조건을 만족시키지 않는다.
즉, "미분가능하지 않다"는 조건보다 더 tight한 조건이다.

Q3. $\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$
이면 $x=a$에서 미분이 가능할까?

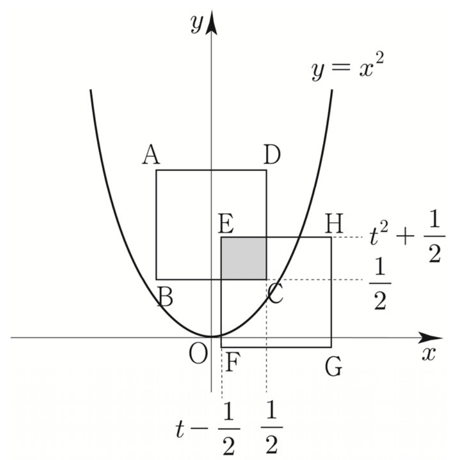
답은 "아니다"이다.
예를 들어 우미분계수가 2이고 좌미분계수가 3이면 위 조건을 만족시키지만 $x=a$에서 미분가능하지 않을 수 있다.

220

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(t,\ t^2)$라 하면 점 $\mathrm{E}\left(t-\frac{1}{2},\ t^2+\frac{1}{2}\right)$이다.

곡선 $y=x^2$은 y축에 대하여 대칭이므로 $t<0$일 때와 $t>0$일 때 최댓값이 서로 같다. 즉, $t>0$일 때만 고려하면 된다. $t\geq1$일 때, 공통부분이 존재하지 않으므로 $0<t<1$에서 최댓값을 구하면 된다.



공통된 부분의 넓이를 $f(t)$라 하면

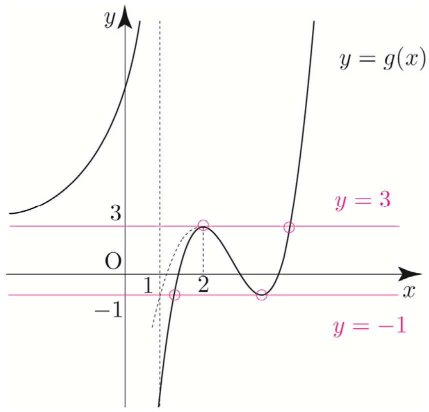
$$f(t)=\left\{\frac{1}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$
$$=(1-t)t^2=-t^3+t^2\quad(0<t<1)$$

$$f'(t)=-3t^2+2t=-3t\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면

①과 마찬가지로 $t>9$이고, t가 충분히 크면 직선 $y=t$는 곡선 $y=g(x)$와 한 점에서 만난다.
즉, 조건을 만족시키지 않는다.

③ $a-9<0 \Rightarrow a<9$



조건을 만족시키려면 $y=a+\dfrac{a-9}{x-1}$의 점근선은
위 그림과 같이 $y=3$이어야 하므로 $a=3$이고,
삼차함수 $y=f(x)$는 $f(2)=3$이므로 직선 $y=3$에 접해야 한다. 또한 삼차함수 $y=f(x)$는 직선 $y=-1$에 접하고, $f(1)\le -1$이어야 한다.

식세우기 Technique에 의해서
$f(x)=(x-2)^2(x-k)+3 \ (k>2)$
$f'(x)=2(x-2)(x-k)+(x-2)^2=(x-2)(3x-2k-2)$
함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2k+2}{3}$에서 극솟값 -1을 가져야 하므로

$$f\left(\frac{2k+2}{3}\right)=-1 \Rightarrow \left(\frac{2k+2}{3}-2\right)^2\left(\frac{2k+2}{3}-k\right)+3=-1$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{27}(k-2)^2+3=-1 \Rightarrow (k-2)^2=27$$

$\Rightarrow k=5$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+3$이므로

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-9}{x-1} & (x<1)\\ (x-2)^2(x-5)+3 & (x\ge 1)\end{cases}$$

따라서 $(g\circ g)(-1)=g(g(-1))=g(6)=19$이다.

답 19

240

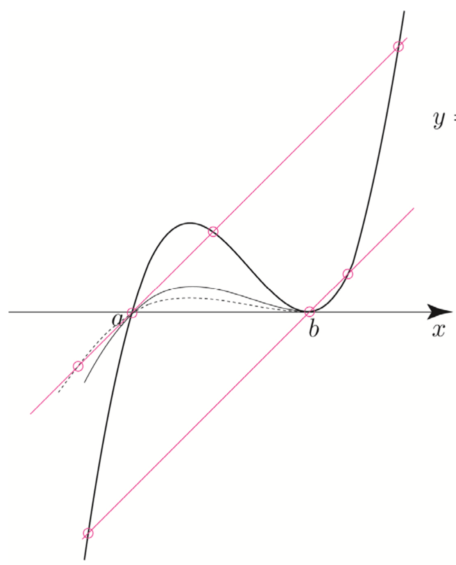
(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 $a,\ b\ (a<b)$라 하자.

(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 $a,\ b$이므로
$\Rightarrow x-f(x)=a$ or $x-f(x)=b$
$\Rightarrow f(x)=x-a$ or $f(x)=x-b$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-a$, $y=x-b$가 만나는 서로 다른 점의 총 개수가 3이어야 한다.

최고차항의 계수가 양인지 음수인지 또는
a와 b중 누가 중근이냐에 따라 case분류 하면 다음과 같다.

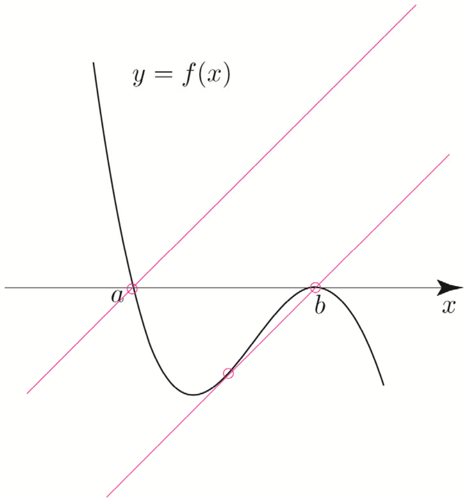
① $f(x)=k(x-a)(x-b)^2 \quad (k>0)$



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2 또는 3이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-b$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이므로 조건을 만족시키지 않는다.

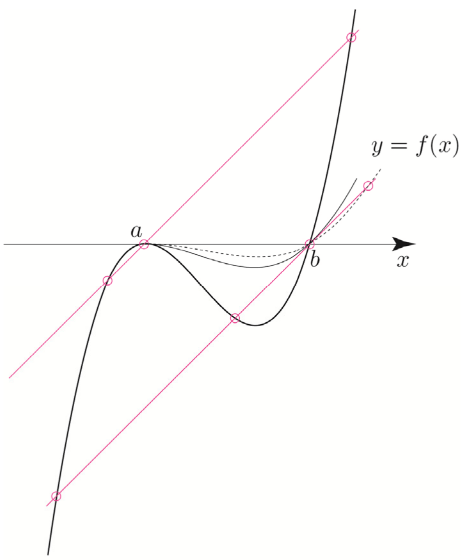
(참고로 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f'(a)<1$이더라도 $x<a$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-a$가 한 점에서 만난다.)

② $f(x)=k(x-a)(x-b)^2 \quad (k<0)$



위 그림과 같은 경우 (나) 조건을 만족시키지만
$f(1)=4$, $f'(1)=1$을 만족시키지 않는다.

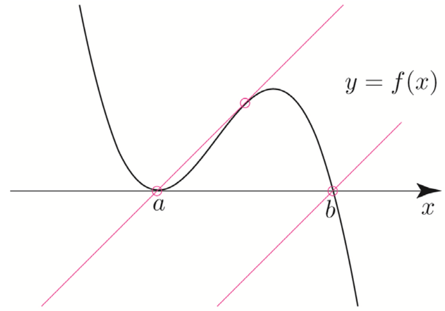
③ $f(x)=k(x-a)^2(x-b) \quad (k>0)$



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-b$가
만나는 서로 다른 점의 개수가 2 또는 3이므로 조건을 만족시키지 않는다.

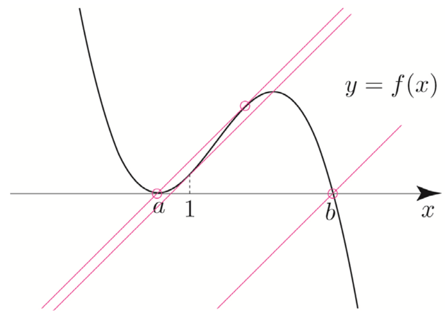
(참고로 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f'(b)<1$이더라도
$x>b$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-b$가 한 점에서 만난다.)

④ $f(x)=k(x-a)^2(x-b) \quad (k<0)$



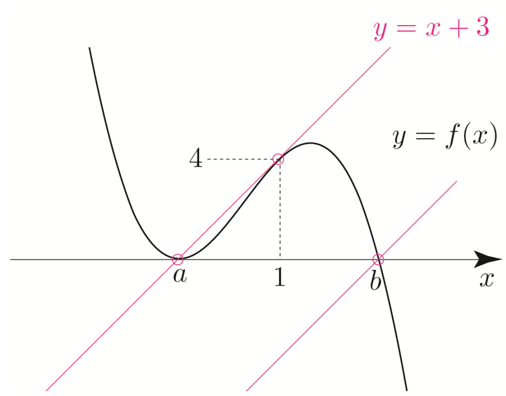
위 그림과 같은 경우 (나) 조건을 만족시킨다.
$f(1)=4$, $f'(1)=1$를 만족시켜야 하므로
$x=1$의 위치에 따라 case분류하면 다음과 같다.

④ - i)



$f'(0)>1$을 만족시키지 않는다.

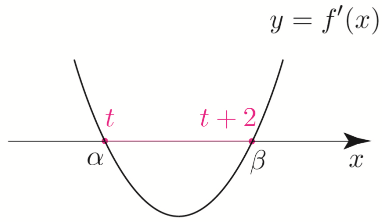
④ - ii)



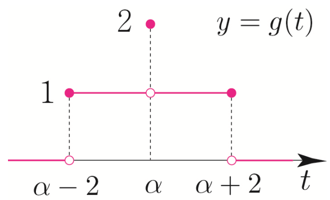
$f'(0)>1$을 만족시킬 수 있다.

점 $f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식은
$y=x+3$이므로 $a=-3$이다.

② $\beta-\alpha=2 \Rightarrow \beta=\alpha+2$일 때



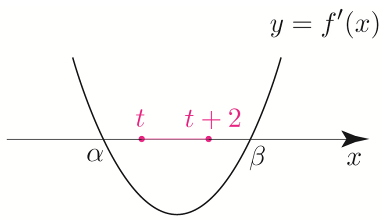
함수 $g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



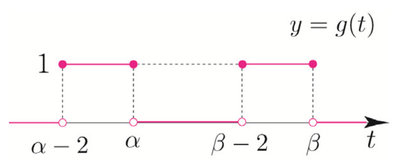
(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t) \le 2$

이 경우 (가) 조건을 만족시킨다.

③ $\beta-\alpha>2$일 때



함수 $g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



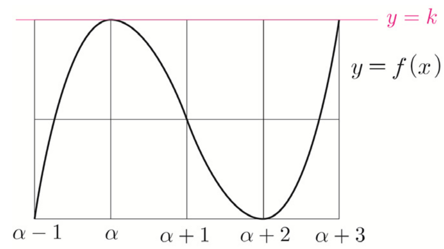
(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t) \le 2$

이 경우 (가) 조건을 만족시키지만 $g(t)$의 치역은 0과 1 이므로 (나) 조건에서 $g(f(1))=g(f(4))=2$를 만족시킬 수 없다.

즉, ② $\beta-\alpha=2 \Rightarrow \beta=\alpha+2$이어야 한다.

(나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$
$g(\alpha)=2 \Rightarrow f(1)=f(4)=\alpha$

$f'(\alpha)=f'(\alpha+2)=0$이므로
Box를 그리면 다음과 같다.



$f(\alpha)=k$라 하자.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

식세우기 Technique을 사용하면

$f(x)-k=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\alpha-3)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\alpha-3)+k$

$f(1)=\frac{1}{2}(1-\alpha)^2(-2-\alpha)+k$

$f(4)=\frac{1}{2}(4-\alpha)^2(1-\alpha)+k$

$f(1)=f(4)=\alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(1-\alpha)^2(-2-\alpha)+k=\frac{1}{2}(4-\alpha)^2(1-\alpha)+k$

$\Rightarrow (1-\alpha)^2(-2-\alpha)-(4-\alpha)^2(1-\alpha)=0$

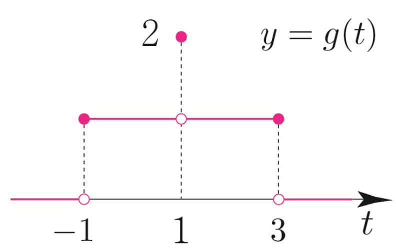
$\Rightarrow (1-\alpha)\{(1-\alpha)(-2-\alpha)-(4-\alpha)^2\}=0$

$\Rightarrow (1-\alpha)(9\alpha-18)=0$

$\Rightarrow \alpha=1 \text{ or } \alpha=2$

❶ $\alpha=1$일 때

함수 $g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$f(1)=\frac{1}{2}(1-1)^2(-2-1)+k=k$

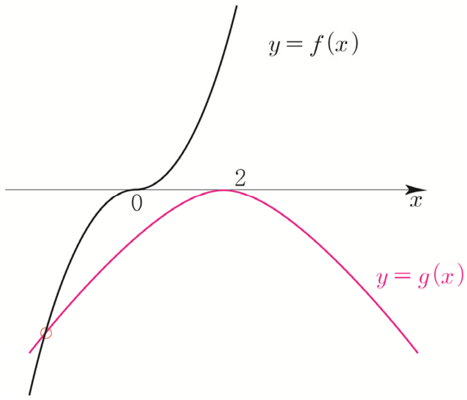
$f(1)=1 \Rightarrow k=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$

①- i), ①- ii)의 경우 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나므로 (다)조건을 만족시키지 않는다.

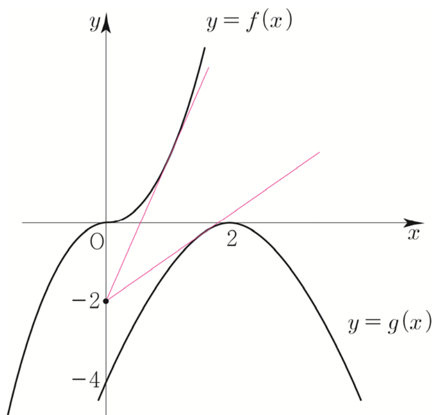
② 방정식 $2t^2+(c-6)t-4c=0$이 0과 0이 아닌 하나의 실근을 갖는 경우

방정식에 $t=0$을 대입하면 $c=0$이므로 $f(x)=x^3$



$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 한 점에서 만나므로 (다) 조건을 만족시킨다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le kx-2\le f(x)$
직선 $y=kx-2$는 k와 관계없이 항상 지나는 점이 $(0,\ -2)$이다. 즉, k를 "정점 $(0,\ -2)$을 지나는 직선의 기울기"로 해석할 수 있다. (정점 Technique !)



따라서 직선 $y=kx-2$가 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 k의 값이 최대이고, $y=g(x)$의 그래프에 접할 때 k의 값이 최소이다.

❶ 직선 $y=kx-2$가 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때, 접점의 x좌표를 p라 하면

$f(x)=x^3$
$f'(x)=3x^2$

$f'(p)=k\ \Rightarrow\ 3p^2=k$

$f(p)=kp-2\ \Rightarrow\ p^3=kp-2$
위 두식을 연립하면
$p^3=3p^3-2\ \Rightarrow\ p=1$
$k=3$이므로 $\alpha=3$

❷ 직선 $y=kx-2$가 $y=g(x)$의 그래프에 접할 때, 접점의 x좌표를 q라 하면

$g(x)=-(x-2)^2$
$g'(x)=-2(x-2)$

$g'(q)=k\ \Rightarrow\ -2q+4=k$
$g(q)=kq-2\ \Rightarrow\ -(q-2)^2=kq-2$
위 두식을 연립하면
$-q^2+4q-4=-2q^2+4q-2$

$\Rightarrow\ q^2=2\ \Rightarrow\ q=\sqrt{2}\ \ (\because q>0)$
$k=-2\sqrt{2}+4$이므로 $\beta=4-2\sqrt{2}$

$\alpha-\beta=3-(4-2\sqrt{2})=-1+2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$이므로
$a^2+b^2=5$이다.

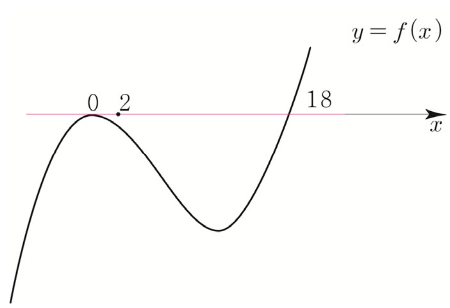
답 5

답이 나왔지만 여기서 한 가지 의문점이 든다.

과연 ①- i) $c=-18$ ($f(x)=x^2(x-18)$) 일 때,
점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2일까?

한번 확인해보자.
$t\{2t^2+(c-6)t-4c\}=0$에 $c=-18$을 대입하면
$t(2t^2-24t+72)=0\ \Rightarrow\ t(t-6)^2=0$이므로
접점의 x좌표는 $t=0$ or $t=6$이다.

$t=0$일 때,
$y=(3t^2-36t)(x-t)+t^3-18t^2\ \Rightarrow\ y=0$이므로
다음 그림과 같이 $y=0$이 접선이 된다.



$t=6$일 때,

$y=(3t^2-36t)(x-t)+t^3-18t^2 \Rightarrow y=-108x+216$

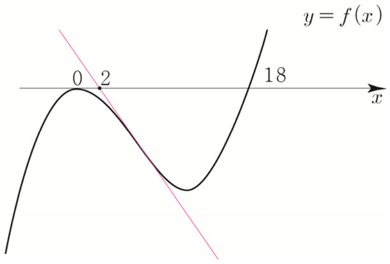
$f(x)=x^3-18x^2$

$f'(x)=3x^2-36x$

$f''(x)=6x-36$

$f''(6)=0$

$f(x)$의 변곡점은 $(6,\ f(6))$이므로 접점이 변곡점이고 다음 그림과 같이 $y=-108x+216$은 **변곡접선**이 된다.



따라서 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=x^3(x-18)$에 그은 접선의 개수는 2이다.

244

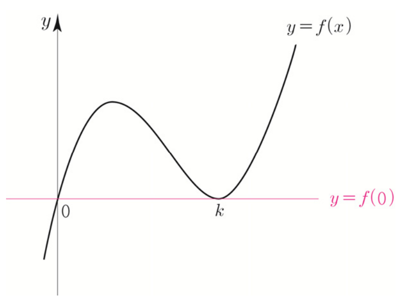
$t>0$, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$이므로

$g(t)$는 두 점 $(0,\ f(0))$, $(t,\ f(t))$의 기울기로 해석할 수 있다.

Guide step에서 배웠듯이 삼차함수의 개형은 3가지인데 (가)조건을 만족시키려면 극댓값과 극솟값을 갖는 ①번 개형이어야 한다.

또한 (가) 조건에 의해서 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(k,\ f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.



$f(x)-f(0)=x(x-k)^2$

$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)=(3x-k)(x-k)$

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$

(나) 조건에 의해서

$f'(a)=g(a) \Rightarrow (3a-k)(a-k)=(a-k)^2$

$\Rightarrow 2a(a-k)=0 \Rightarrow a=k \left(\because a>\dfrac{5}{3}\right)$

$g(a)=0$이고 $f'\left(\dfrac{k}{3}\right)=f'(k)=0$이므로

(나) 조건에 의해서

$f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=f'(a)=0 \Rightarrow \dfrac{k}{3}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow k=5$

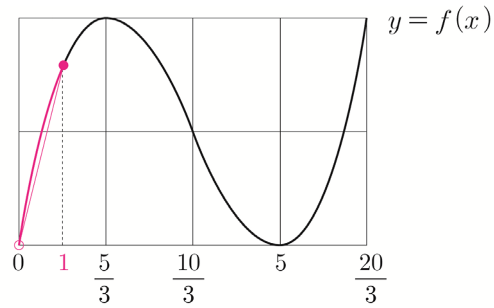
$A_m=\{x \mid f'(x)=g(m),\ 0<x\le m\}$

m에 값을 넣어보면서 파악해보자.

$m=1$이면

$A_1=\{x \mid f'(x)=g(1),\ 0<x\le 1\}$

Box를 그려서 파악해보자.
(Box를 그리면 삼차함수의 비율관계를 손쉽게 알 수 있어 $x=1$의 위치를 대략적으로 알 수 있다.)

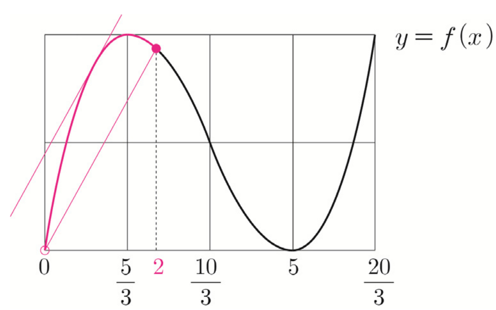


$0<x\le 1$에서 방정식 $f'(x)=g(1)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_1)=1$이다.

(여기서 $f(1)$과 $f\left(\dfrac{10}{3}\right)$의 대소관계는 중요한 사항이 아니다. 즉, 정확하게 점 $(1,\ f(1))$의 위치를 찾지 않아도 된다.)

$m=2$이면

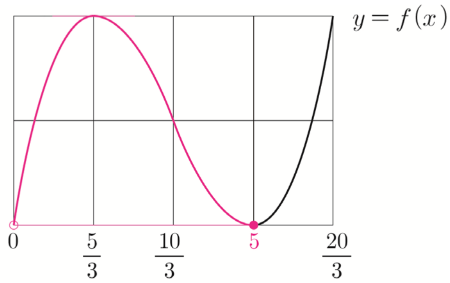
$A_2=\{x \mid f'(x)=g(2),\ 0<x\le 2\}$



$0<x\le 2$에서 방정식 $f'(x)=g(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_2)=1$이다.

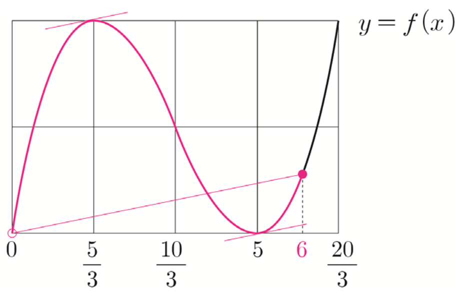
$m=3,\ m=4$일 때도 마찬가지 방법으로
$n(A_3)=n(A_4)=1$이다.

$m=5$이면
$A_5=\{x\mid f'(x)=g(5),\ 0<x\le 5\}$



$0<x\le 5$에서 방정식 $f'(x)=g(5)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_5)=2$이다.

$m=6$이면
$A_6=\{x\mid f'(x)=g(6),\ 0<x\le 6\}$



$0<x\le 6$에서 방정식 $f'(x)=g(6)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_6)=2$이다.

$m>6$이면 그래프를 그렸을 때, $m=6$과 마찬가지로 방정식 $f'(x)=g(m)$을 만족시키는
$x<\frac{5}{3}$ or $5<x<m$인 서로 다른 두 실근이 존재한다.
(by 평균값 정리)

여기서 조심해야 할 것은 x의 범위인데
$0<x\le m$이므로 실근이 0 이하가 되면 집합에 포함되지 않는다.

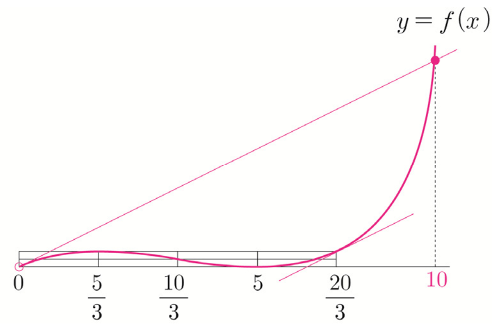
즉, 경계(실근이 $x=0$)일 때의 상황을 조사해봐야 한다.

$f'(0)=g(m)$임을 만족시키는 m을 구해보자.

$f'(x)=(3x-5)(x-5),\ g(t)=(t-5)^2$

$f'(0)=g(m)\Rightarrow 25=(m-5)^2\Rightarrow m=10\ (\because m>0)$

$m=10$이면
$A_{10}=\{x\mid f'(x)=g(10),\ 0<x\le 10\}$



$x=0$일 때 $f'(0)=g(10)$이지만 $0<x\le 10$의 범위에 포함되지 않는다.
$0<x\le 10$에서 방정식 $f'(x)=g(10)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_{10})=1$이다.

$g(m)$의 값이 커질수록 (직선의 기울기가 커질수록)
$x<\frac{5}{3}$에서 $f'(x)=g(m)$을 만족시키는 x의 값은 작아진다.
$\left(\because x_1<x_2<\frac{5}{3}\Rightarrow f'(x_1)>f'(x_2)\right)$

즉, $m>10$이면 $x<\frac{5}{3}$에서 $f'(x)=g(m)$을
만족시키는 x의 값은 0보다 작아지므로 $n(A_m)=1$이다.

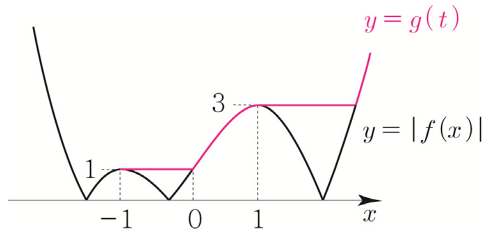
($5<m<10$이면 $x<\frac{5}{3}$에서 $f'(x)=g(m)$을
만족시키는 x의 값은 0보다 크므로 $n(A_m)=2$)

따라서 $n(A_m)=2$를 만족시키는 자연수 m은
5, 6, 7, 8, 9 이므로 조건을 만족시키는
모든 자연수 m의 값의 합은 $5+6+7+8+9=35$이다.

답 35

245

$p,\ q$는 25 이하의 자연수
$f(x)=x^3-3px^2+q$
$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$



$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{-1}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{1} g(t)dt$

$= \int_{-1}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{1} (-t^3+3t+1)dt$

$= 1 + \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + t\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{13}{4} = \frac{q}{p}$

따라서 $p+q=17$이다.

답 17

110

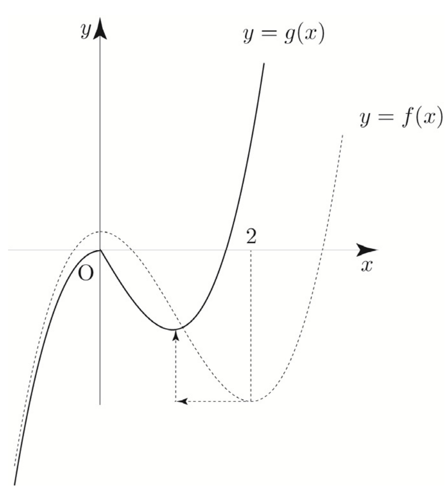
최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$
$\Rightarrow$ $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

$p>0$에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$ 모두 원점을 지나므로 $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$이다.

$f(x)$가 아래 그림과 같을 때, 위 정보를 바탕으로 $g(x)$를 대략적으로 그려보면 다음과 같다. (p와 $f(x)$의 상수항을 알지 못하기 때문에 정확한 $g(x)$의 그래프를 그릴 수는 없지만 감을 찾기 위해서 대략적으로 그려보자.)



ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

$p=1$일 때,

$$g(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x \le 0) \\ x^3-3x & (x>0) \end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & (x<0) \\ 3x^2-3 & (x>0) \end{cases}$$

$g'(1)=0$이므로 ㄱ은 참이다.

이번에는 그래프적 관점에서 접근해보자.

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+1)-f(1) & (x>0) \end{cases}$$

함수 $y=f(x+1)-f(1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

함수 $f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 함수의 도함수는 함수 $f'(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 함수와 같으므로 함수 $f(x+1)-f(1)$의 도함수는 $f'(x+1)$이다.

$g'(1)=f'(2)=0$이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능해야 한다.

$$g(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x \le 0) \\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0) \end{cases}$$

$A(x)=x^3-3x^2$라 하면 $A'(x)=3x^2-6x$

$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = A'(0)=0$이다.

$B(x)=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$라 하면

$B'(x)=3x^2+2(3p-3)x+3p^2-6p$

$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 3p^2-6p$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

$\Rightarrow 3p^2-6p=0 \Rightarrow 3p(p-2)=0 \Rightarrow p=2\ (\because\ p>0)$

즉, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p는 오직 $p=2$ 뿐이므로 ㄴ은 참이다.

이번에는 그래프적 관점에서 접근해보자.

$$g(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0)\end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$
이어야 한다.

함수 $y=f(x+p)-f(p)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $-f(p)$만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

함수 $f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 함수의 도함수는 함수 $f'(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 함수와 같으므로 $f(x+p)-f(p)$의 도함수는 $f'(x+p)$이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=f'(0+p)=f'(p)=0$$
이때 $f'(p)=0$을 만족시키는 양수 p는 2뿐이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $p\ge2$일 때, $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(x)dx\ge0$이다.

$$g(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x\le 0) \\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0)\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2)dx$$
$$=\left[\frac14x^4-x^3\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac14+1\right)=-\frac54$$

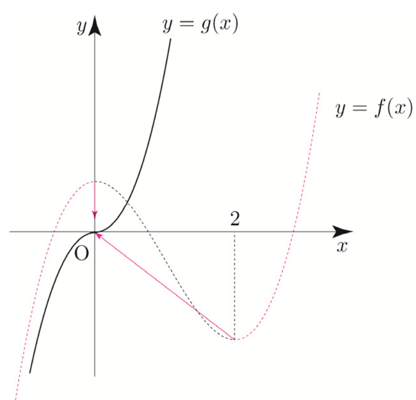
$$\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{0}^{1}\{x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x\}dx$$
$$=\left[\frac14x^4+(p-1)x^3+\frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac14+(p-1)+\frac{3p^2-6p}{2}$$
$$=\frac32p^2-2p-\frac34$$
이므로

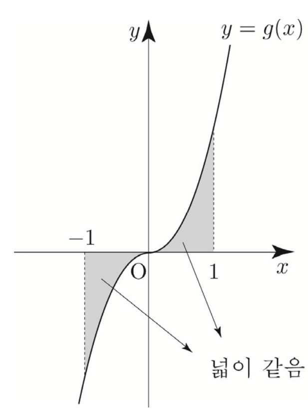
$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx$$
$$=-\frac54+\frac32p^2-2p-\frac34$$
$$=\frac32p^2-2p-2$$
$$=\frac12(3p+2)(p-2)$$

$p\ge2$일 때, $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(x)dx=\frac12(3p+2)(p-2)\ge0$이므로
ㄷ은 참이다.

이번에는 그래프적 관점에서 접근해보자.
(정적분을 넓이의 관점에서 접근하는 풀이이므로
정적분의 활용을 배우지 않은 학생의 경우
다음 중단원인 정적분의 활용을 배운 후 보도록 하자.)

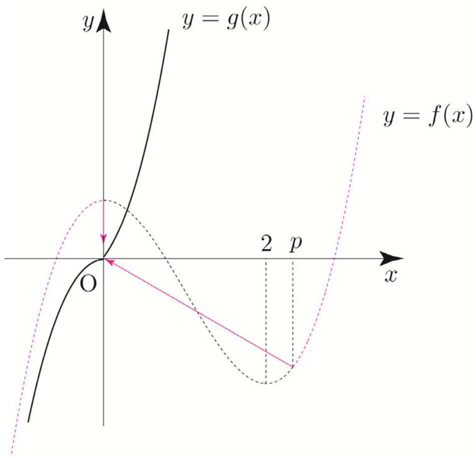
$p=2$일 때, 함수 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.

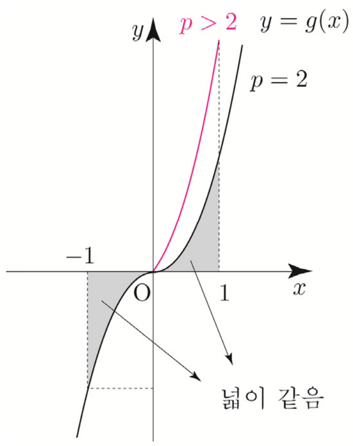




삼차함수의 대칭성에 의해서 $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$이다.

$p > 2$일 때, 함수 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.





$p > 2$일 때 $\int_{-1}^{0} g(x)dx$의 값과 $p = 2$일 때 $\int_{-1}^{0} g(x)dx$의 값은 서로 같고,

$p > 2$일 때 $\int_{0}^{1} g(x)dx$의 값이 $p = 2$일 때 $\int_{0}^{1} g(x)dx$의 값보다 크다.

$p \geq 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$이므로 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

111

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$g(x) = \int_{0}^{x} tf(t)dt$

$g(0) = 0,\ g'(x) = xf(x)$

ㄱ. $g'(0) = 0$

$g'(x) = xf(x)$에 $x = 0$을 대입하면

$g'(0) = 0$이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 양수 α에 대하여 $g(\alpha) = 0$이면 방정식 $f(x) = 0$은 열린구간 $(0,\ \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ \alpha]$에서 연속이고
열린구간 $(0,\ \alpha)$에서 미분가능하다.
$g(0) = g(\alpha) = 0$이므로 롤의 정리에 의해서
$g'(c) = 0$인 c가 열린구간 $(0,\ \alpha)$ 사이에
적어도 하나 존재한다.

$g'(c) = cf(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 0\ (\because 0 < c < \alpha)$
이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 양수 β에 대하여 $f(\beta) = g(\beta) = 0$이면 모든 실수 x에 대하여 $\int_{\beta}^{x} tf(t)\,dt \geq 0$이다.

$h(x) = \int_{\beta}^{x} tf(t)\,dt$라 하면
$h(\beta) = 0,\ \ h'(x) = xf(x)$
$f(\beta) = 0$이므로 $h'(x) = xf(x)$에 $x = \beta$를 대입하면
$h'(\beta) = 0$이다.
$h(\beta) = h'(\beta) = 0$이므로 $h(x)$는 $(x-\beta)^2$을
인수로 갖는다.
$g(\beta) = 0 \Rightarrow \int_{0}^{\beta} tf(t)dt = 0 \Rightarrow \int_{\beta}^{0} tf(t)dt = 0$
이므로 $h(0) = 0$이다.
$h'(x) = xf(x)$에 $x = 0$을 대입하면 $h'(0) = 0$이다.
$h(0) = h'(0) = 0$이므로 $h(x)$는 x^2을
인수로 갖는다.

$h(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로
$h(x) = ax^2(x-\beta)^2\ (a > 0)$이다.

모든 실수 x에 대하여 $h(x) \geq 0$이므로
ㄷ은 참이다.

답 ⑤

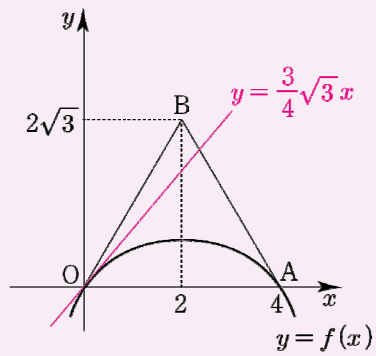
Tip <접선의 기울기를 이용한 위치관계 판단>

Q. 곡선 $y=f(x)$와 직선 OB는 $0<x<2$에서 교점이 존재할까?

물론 직선 OB는 $y=\sqrt{3}\,x$이므로
방정식 $f(x)=\sqrt{3}x$을 풀어서 확인할 수도 있지만
$x=0$에서의 접선의 기울기를 이용하면 된다.

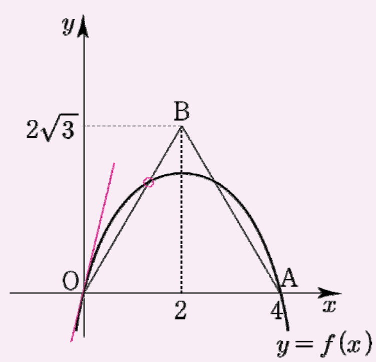
$f'(x)=-\frac{3}{16}\sqrt{3}(2x-4)$ 이므로

$f'(0)=\frac{3}{4}\sqrt{3}<\sqrt{3}$이다.



따라서 $0<x<2$에서 교점이 생기지 않는다.

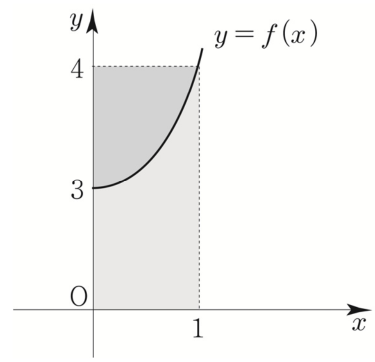
만약 $f'(0)>\sqrt{3}$이면 아래 그림과 같이 교점이 존재한다.



즉, 접선의 기울기는 함수의 위치관계를 판단하는 유용한 도구로 사용될 수 있다.

027

$f(x)=x^3+3(x\geq 0)$
$f(1)=4$



$\int_0^1 f(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$는 직사각형의 넓이와 같으므로
(정적분의 활용 Guide step
개념파악하기 - (5) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$사이의 넓이는 어떻게 구할까?)
$\int_0^1 f(x)dx+\int_3^4 g(x)dx=1\times4=4$이다.

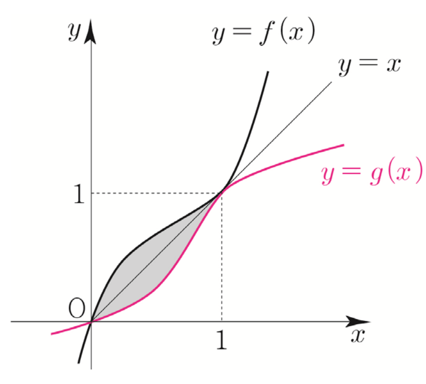
답 4

028

$f(x)=x^3-2x^2+2x$
$f'(x)=3x^2-4x+2\ \geq 0$
$f(x)$는 증가함수이므로 $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 그래프의 교점은 반드시 $y=x$선상에 존재한다.
(함수의 연속 Master step 64번 해설 tip 참고)

$x^3-2x^2+2x=x \Rightarrow x(x-1)^2=0$

$\Rightarrow x=0$ or $x=1$
($x=1$에서 중근을 가지므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 $(1,\ 1)$에서 접한다.)
즉, $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$에서 만난다.

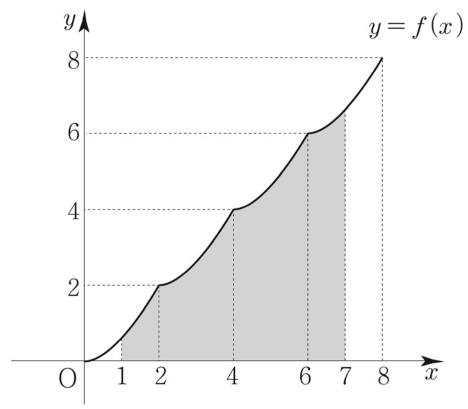


$f(t-2)=\frac{1}{2}(t-2)^2$이므로

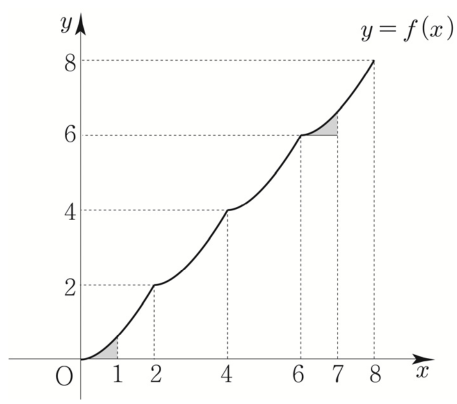
$f(t)=\frac{1}{2}(t-2)^2+2\ \ (2 \le t < 4)$

즉, 이전 구간의 함수를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시켜 다음 구간의 함수를 찾을 수 있다.

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면

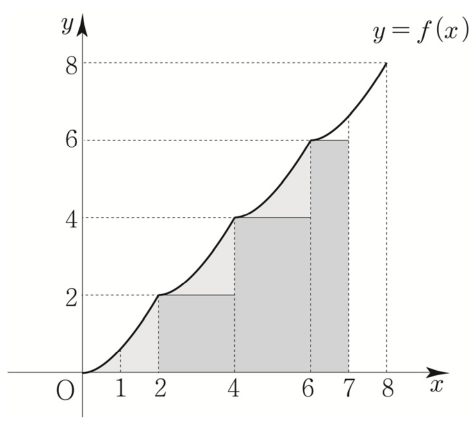


$\int_1^7 f(x)dx$는 위의 색칠한 영역의 넓이와 같다.



위 색칠한 두 영역의 넓이가 같으므로

$\int_1^7 f(x)dx$는 아래의 색칠한 영역의 넓이와 같다.



위 색칠한 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=3\int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx+(2\times2)+(2\times4)+(1\times6)$$

$$=3\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2+18=22$$

따라서 $\int_1^7 f(x)dx=22$이다.

답 ③

065

$f(t)=t^2-t,\ g(t)=-3t^2+6t$

ㄱ. 점 P는 출발 후 운동 방향을 1번 바꾼다.

$f(t)=t(t-1)$

$t=1$를 경계로 $f(t)$의 부호가 변하므로

점 P는 $t=1$에서만 운동 방향을 1번 바꾼다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $t=2$에서 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $p,\ q$라 할 때, $pq<0$이다.

$f'(t)=2t-1 \Rightarrow f'(2)=3=p$

$g'(t)=-6t+6 \Rightarrow g'(2)=-6=q$

$pq=-18<0$

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $t=0$부터 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는 8이다.

$$\int_0^3 |g(t)|dt=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^3=8$$

따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

066

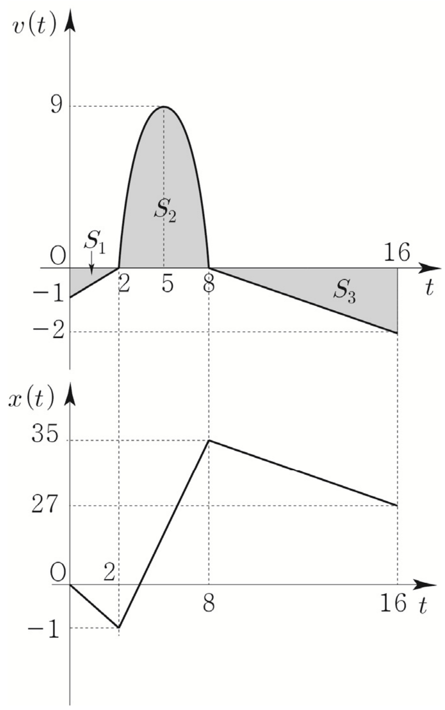
$S_1,\ S_2,\ S_3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

등차중항에 의해 $2S_2=S_1+S_3$이다.

$$3S_2=S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^2 f(x)dx$$

$S_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$

$v(t)$를 바탕으로 $x(t)$를 그리면



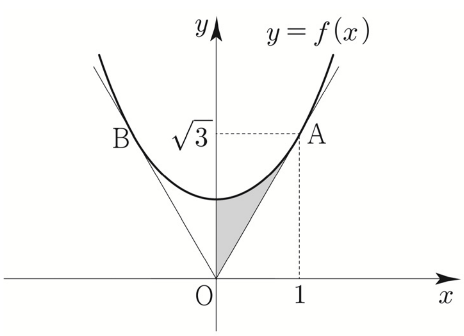
(편의상 $x(t)$를 직선으로 나타냈지만 원래는 곡선이다.)
따라서 선분 OP의 길이의 최댓값은 35이다.

답 35

Tip 점 P가 **수직선 위**를 움직이고 있다는 사실을 절대로 잊으면 안 된다.

069

(중학교 3학년 내용 복습 : 이차함수 $y = ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 포물선이라고 한다.)
직선 CF를 x축, 점 O를 원점,
포물선 C_1 : $y = ax^2 + b$
$f(x) = ax^2 + b$



반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OA} = 2$
$\angle AOF = 60^\circ$ 이므로
$A(2\cos 60^\circ,\ 2\sin 60^\circ) \Rightarrow A(1,\ \sqrt{3})$
점 A는 $f(x)$위의 점이므로
$f(1) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3}$
직선 OA의 방정식은 $y = \sqrt{3}x$이고
점 A에서의 접선의 기울기는 $\sqrt{3}$이므로

$f'(1) = \sqrt{3} \Rightarrow 2a = \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = \sqrt{3}x$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 k라 하고, 6개의 포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

대칭성에 의해서

$$S = 12k = 12\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x \right) dx$$

$$= 12\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x \right]_0^1 = 2\sqrt{3}$$

답 ①

070

$v(t) = 3t^2 + at$

$x(t) = t^3 + \frac{a}{2}t^2 + c$

$x(0) = 0 \Rightarrow c = 0$이므로

$x(t) = t^3 + \frac{a}{2}t^2$

시각 $t = 2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10이므로
$|x(2) - 6| = 10 \Rightarrow |8 + 2a - 6| = 10$

$\Rightarrow |a + 1| = 5 \Rightarrow a = 4$ ($\because$ $a > 0$)

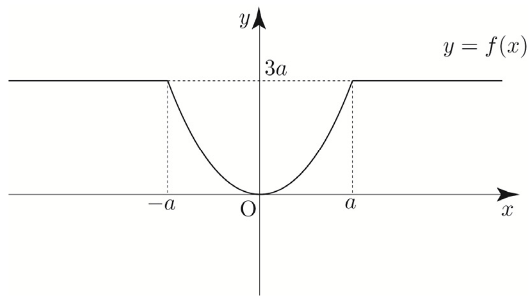
따라서 상수 $a = 4$이다.

답 ④

078

$a>0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{a}x^2 & (-a\le x\le a)\\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$



a와 3의 대소 관계에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $0<a<3$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$$\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_{0}^{3}f(x)dx=2\left(\int_{0}^{a}\frac{3}{a}x^2dx+\int_{a}^{3}3a\,dx\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{a}x^3\right]_0^a+2\,[3ax]_a^3=2a^2+2(9a-3a^2)$$

$$=-4a^2+18a=8$$

$\Rightarrow\ 2a^2-9a+4=0\ \Rightarrow\ (2a-1)(a-4)=0$

$\Rightarrow\ a=\frac{1}{2}\ \ (\because\ 0<a<3)$

② $a\ge 3$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$$\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_{0}^{3}f(x)dx=2\int_{0}^{3}\frac{3}{a}x^2dx$$

$$=2\left[\frac{1}{a}x^3\right]_0^3=\frac{54}{a}=8$$

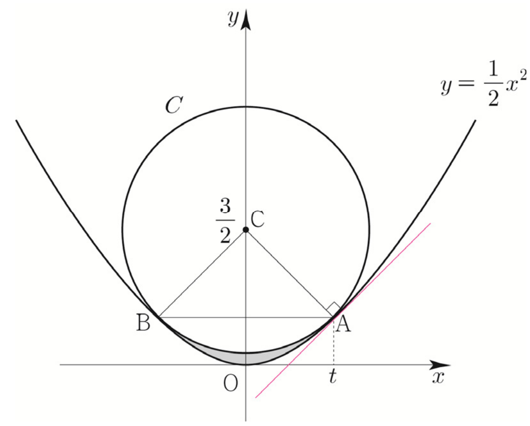
$\Rightarrow\ a=\frac{54}{8}=\frac{27}{4}$

모든 a의 값의 합 $S=\frac{1}{2}+\frac{27}{4}=\frac{29}{4}$이므로

$40S=40\times\frac{29}{4}=290$이다.

답 290

079



$f(x)=\frac{1}{2}x^2$

$f'(x)=x$

접점 A의 x좌표를 t라 하면

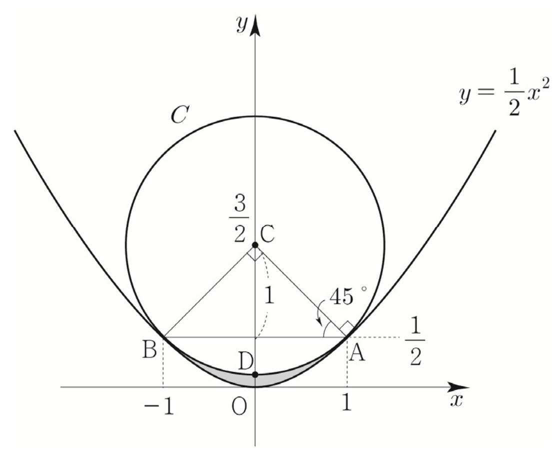
직선 AC의 기울기$=\dfrac{\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}}{t-0}$

직선 AC와 점 $\mathrm{A}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선은 서로 수직하므로

$$\frac{\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}}{t-0}\times f'(t)=-1\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}=-1$$

$\Rightarrow\ t=1\ \ (\because t>0)$

$\mathrm{A}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$이므로 대칭성에 의해서 $\mathrm{B}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$



원 C의 반지름의 길이 $=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$

부채꼴 ACD 의 넓이 $=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

$(\because \angle\mathrm{ACD}=45°)$

직선 AC의 방정식은 $y=-x+\frac{3}{2}$

원 C와 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의