제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30,\quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

5. $\tan\theta < 0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 함수 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

9. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

Max min

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

얘네가 존재

⇒ 그래프

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

$a=4$

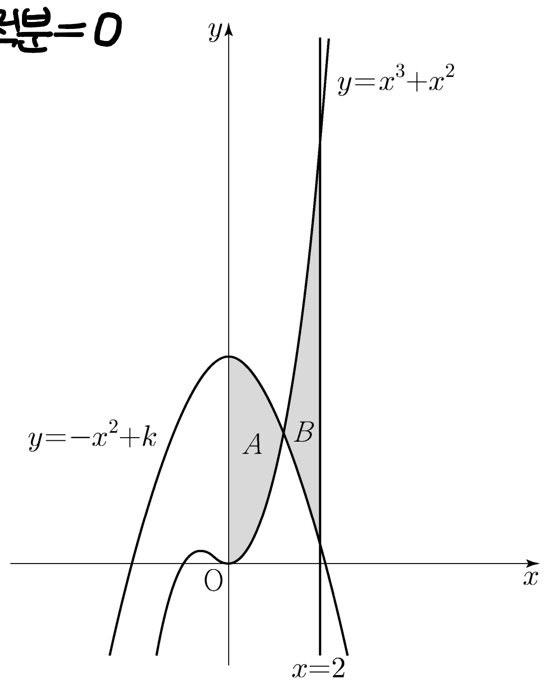
$4-\sqrt{3}\tan 2b = 3$

$b=\frac{\pi}{12}$

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

빼서 정적분=0



$\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx = 0$

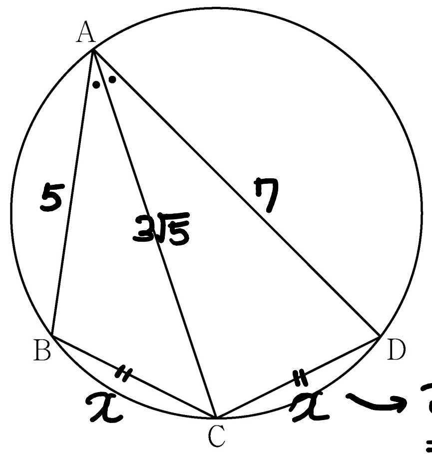
$2k = \frac{28}{3}$

$\therefore k = \frac{14}{3}$

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



→ 같은 원 내접 ⇒ 길이 같음

① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

코사인 법칙 : 각이 같음

$$\cos\bullet=\frac{5^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\cdot5\cdot3\sqrt{5}}=\frac{7^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\cdot7\cdot3\sqrt{5}}$$

$$7(70-x^2)=5(94-x^2)$$

대입

$$x=\sqrt{10}$$

$$\cos\bullet=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\bullet=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2R=\frac{x}{\sin\bullet}=5\sqrt{2}$$

$$\therefore R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1\le x<n$일 때, $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

→ f가 $[n-1, n)$에서 위로 볼록 or 아래로 볼록인 이차함수 → 조건에 맞게 선택

열린구간 $(0,4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

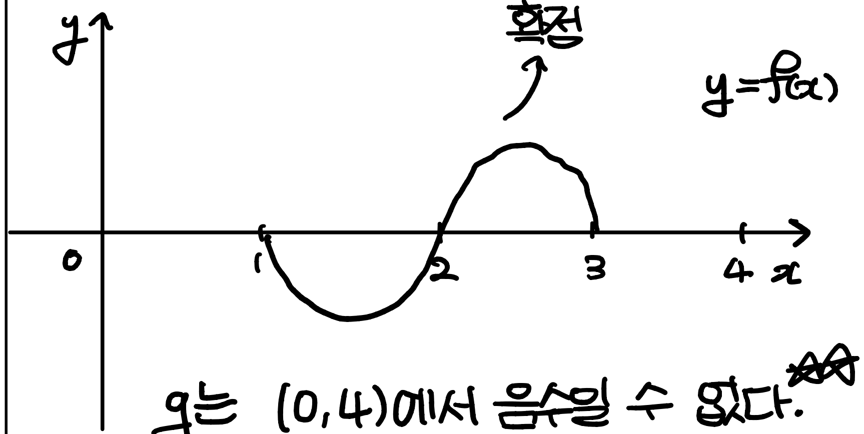
간단하게 해석 : $g(2)=0$은 자명

이때 최소이므로 g가 2에서 극소일 것

g'의 개형은 → 2 →

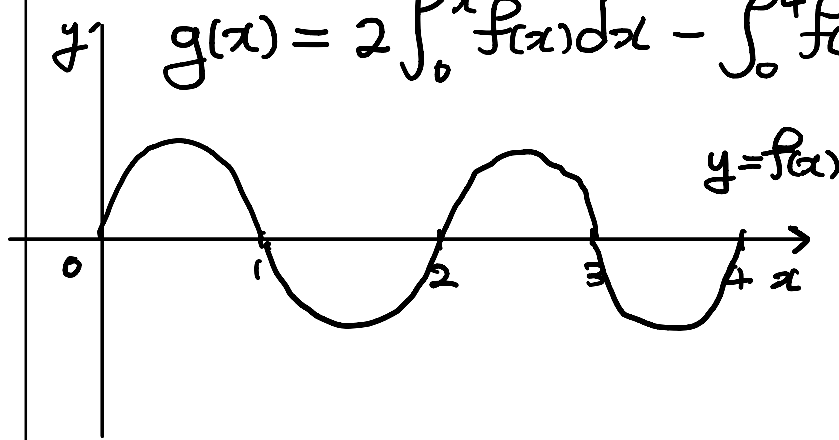
* 연속함수의 정적분 함수는 반드시 미분 가능하다.

$g'(x)=2f(x)$이므로



g는 $(0,4)$에서 음수일 수 없다.

$$g(x)=2\int_0^x f(x)dx-\int_0^4 f(x)dx \text{ 이므로}$$



이렇게 생겨먹어야 함

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx=-\frac{1}{2}$$

계산 tip) 이차함수 넓이 공식

13. 자연수 $m(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점] 기억*

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

m에 제한 ⇒ 노가다 가능

$m^{\frac{12}{n}}$가 정수여야 하므로

m이 제곱수인 경우를 분류

i) m = 4, 9

⇒ $2^{\frac{24}{n}}$가 정수 ⇒ n은 24의 약수 ⇒ 각 7개 (1이 아닌)

ii) m = 8

⇒ 같은 이유로 8개

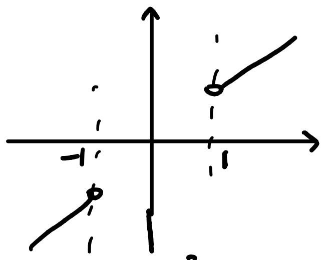
iii) m = 2, 3, 5, 6, 7

⇒ 같은 이유로 각 5개

14 + 8 + 25 = 47

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$



함수 $h(x) = \lim_{t \to 0+} g(x+t) \times \lim_{t \to 2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1) = 3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1) = -2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

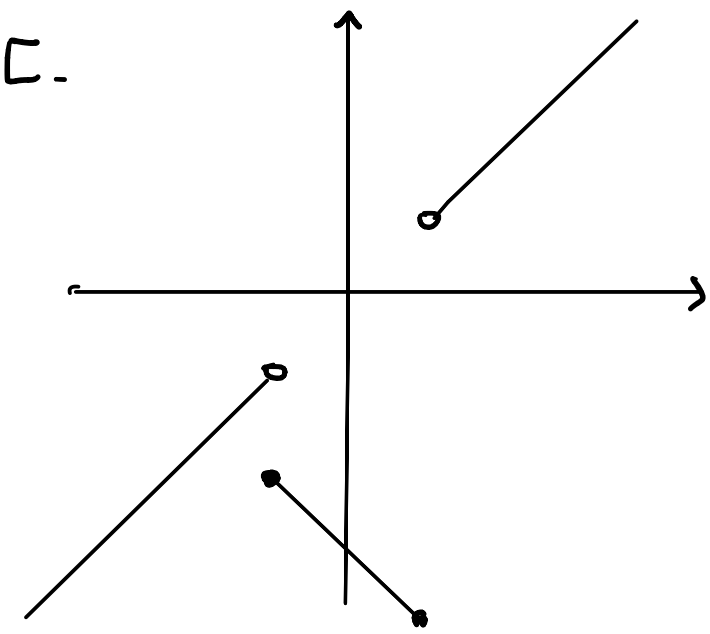
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $h(1) = g(1+) \times g(3+) = 3$ (O)

ㄴ. 상수함수로 f 잡으면 걍 틀림 (X)

ex) $f(x) = 100$

ㄷ.



대충 이렇게 잡으면 최소 없음 (X)

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

> (가) $a_7 = 40$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

$a_6 + a_5 = 40$ or $a_6 = 120$ 이다.
$(a_6 \neq 3$의 배수$)$

$\cdots$ 120 40 160 200 $\cdots$
a_7 a_9
(누가 봐도 이게 Max)

케이스 분류
i) $a_6 = 3k-1$ $(k \in \mathbb{N})$
$a_5 = 41-3k \Rightarrow 1 \le k \le 13$
$a_4 = 6k-42$
$3(41-3k) = 6k-42$
$k = 11$
$\therefore a_9 = 24$

ii) $a_6 = 3k-2$ $(k \in \mathbb{N})$
$a_5 = 42-3k$
$3(3k-2) = 42-3k$
$k = 4$
$\therefore a_9 = 90$

$M = 200$
$m = 24$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 4x^3 - 2x$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55, \quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \leq t \leq 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
>
> (나) $t \geq 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

거리 = 속력($|v(t)|$)의 적분

$$v(t)=\begin{cases}2t^3-8t & (0\leq t\leq 2)\\ 3t^2+4t+C & (t\geq 2)\end{cases}$$

$v(2)=0 \Rightarrow C=-20$

$$S=\int_0^2|2t^3-8t|dt+\int_2^3|3t^2+4t-20|dt$$

$=17$

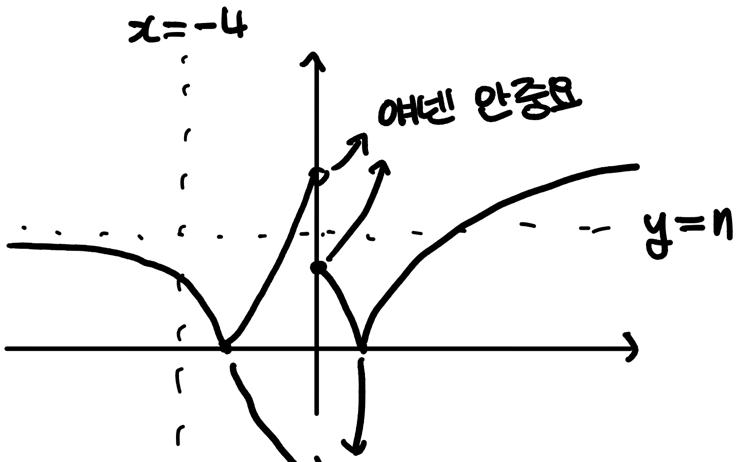
17

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

개형 ?



둘 다 꺾여야 4가 나옴

어차피 4를 넘지는 못 해서 다른 건 알빠노

$9-n>0,$
$2-n<0$ ⇒ 꺾이는 조건

$2<n<9$

$\Sigma=33$

33

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

$f'(g(x))=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

평균변화율로 해석 가능

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}f'(g(x))=f'(1)$$

g 연속 ⇒ $f'(g(1))=f'(1)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

(가)를 평균변화율로 생각하면
(나) 때문에 $f(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서의 접선이
$(1, f(1))$을 지나야함 ⇒ $a=-6$

$f(0)=-3$ ⇒ $c=-3$

$f'(g(1))=f'(1)$ ⇒ $g(1)=3$

$f(g(1))=f(3)=6$ ⇒ $b=12$

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

$\therefore f(4)=13$

13

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.