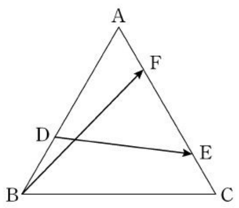
11. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



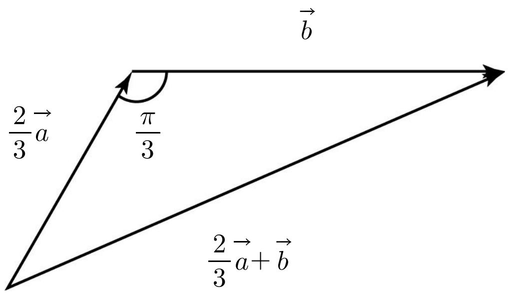
sol)

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\ \vec{c}$라고 하고,

세 점이 각 변의 내분점임을 이용해 $\vec{a}$와 $\vec{b}$로 나타내면

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{1}{3}\vec{a}$ 입니다. 따라서

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$ 이고 이를 그림으로 나타내면 아래와 같습니다.



$\left|\frac{2}{3}\vec{a}\right|=2$, $|\vec{b}|=3$이므로 코사인정리를 적용하면

$|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{DE}|^2=19$

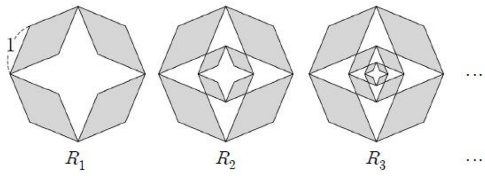
*sol*2)

B를 원점으로 하는 직교좌표를 도입해서 풀겠습니다.

그러면 D, E, F의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{15}{8}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right), \left(\frac{21}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$입니다.

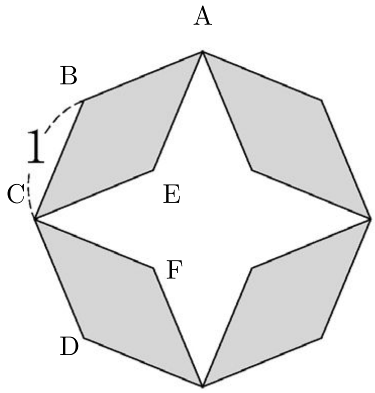
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD}=(4, \sqrt{3})$이고 그 크기의 제곱은 19.

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



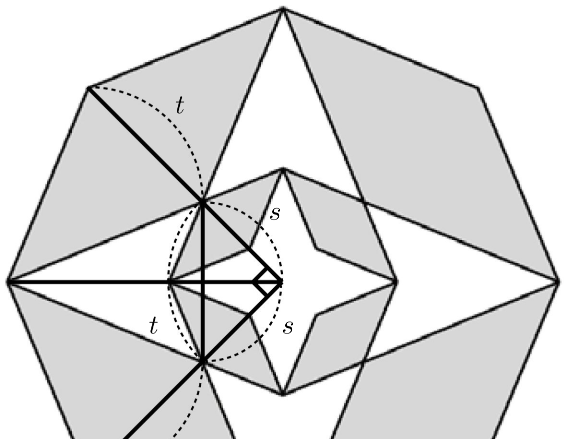
① $2+\sqrt{2}$ ② $1+2\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$
④ $1+3\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{2}$

공비를 구하는 방법이 상당히 여러가지로 나뉘는 문제라 그것을 정리를 해보려 합니다.
우선 무한등비급수의 첫 항인 S_1을 먼저 구해두겠습니다.



정팔각형의 한 내각의 크기는 $\frac{8-2}{8}\pi=\frac{3}{4}\pi$입니다.
삼각형 ABC는 이등변 삼각형이므로
$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=\frac{1}{8}\pi \Rightarrow \angle\mathrm{BCE}=\angle\mathrm{DCF}=\frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow \angle\mathrm{BCE}=\frac{\pi}{4}$. 따라서 S_1은 $\triangle\mathrm{BCE}$의 넓이의 8배입니다.
$\therefore S_1=8\times\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{\pi}{4}=4\sqrt{2}$

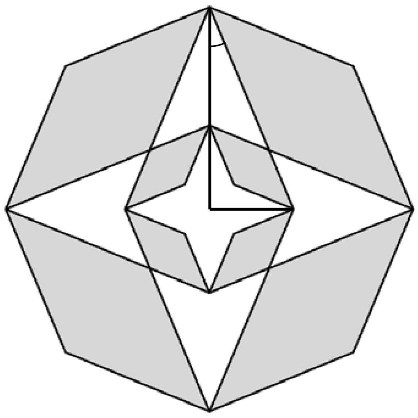
$sol1)$



닮음비를 무게중심과 한 꼭짓점 사이의 비로 구하면 $t+s:s$로 나타낼 수 있습니다.
그리고 그림에서 $t=\sqrt{2}s$이므로
공비는 닮음비의 제곱이므로

$$(\text{공비})=\left(\frac{s}{t+s}\right)^2=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}\text{ 입니다.}$$

$sol2)$

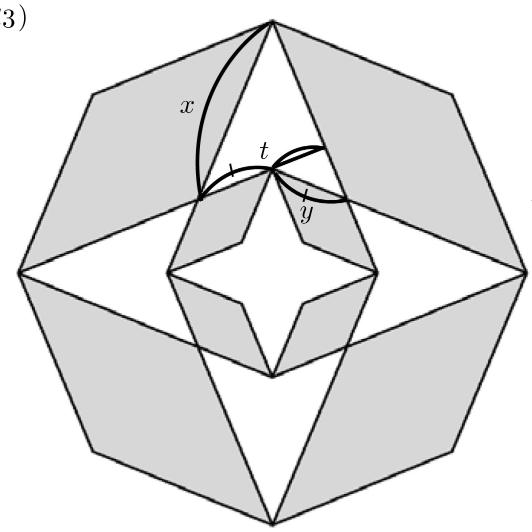


그림의 두 변의 길이의 비 또한 두 도형의 닮음비입니다. 그리고 그 변의 비는 그림에 나타난 각에 대한 tan값으로 나타낼 수 있습니다.

그 각의 크기는 $\frac{\pi}{8}$이고, 탄젠트의 배각공식으로

$\tan\frac{\pi}{8}$의 값을 구하면 $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$입니다.

$sol3)$

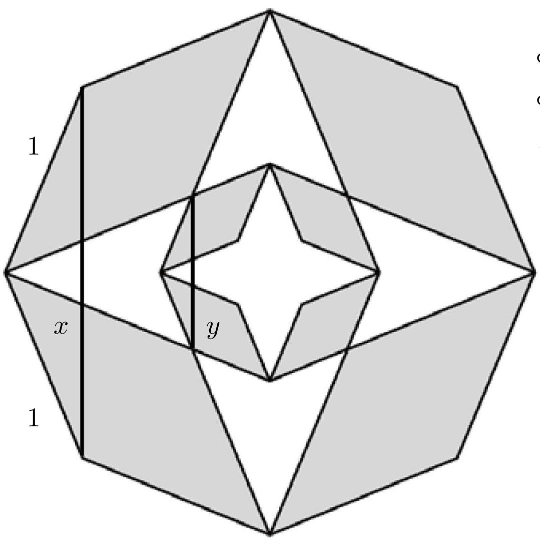


이번에는 한 변의 길이인 x와 y의 변의 길이의 비를 이용하겠습니다.

$\sqrt{2}\,t = y$이고 $\sqrt{2}\,(t+y) = x$이므로

닮음비인 $\frac{y}{x}$는 $\frac{t}{t+y} = \frac{t}{t+\sqrt{2}\,t} = \sqrt{2}-1.$

$sol4)$



이번에는 가장 짧은 대각선인 x와 y의 비를 이용해서 닮음비를 구하겠습니다. 두 변의 길이가 1이고 한 변의 길이가 각각 x, y인 두 이등변삼각형에서 코사인정리를 이용하면 닮음비의 제곱은

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{2-2\cos\frac{\pi}{4}}{2-2\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2.$$

이외에도 여러가지 풀이가 있지만 위의 풀이들이 가장 대표적이라고 생각됩니다.

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2+4$이다.
$\int_1^e f(\ln x)\,dx = ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 정수이다.) [4점]

$sol1)$

우선 문제의 $g(e^x)$가 거슬리니 $e^x = t$로 치환해버리겠습니다.

$$g(t)=\begin{cases} f(\ln t) & (1 \le t < e) \\ g(e^{-1}t)+5 & (e \le t < e^2) \end{cases}$$

이제 주어진 조건식을 처리합시다.

$$\int_1^{e^2} g(x)dx = \int_1^e g(x)dx + \int_e^{e^2} g(x)dx = \int_1^e f(\ln x)dx + \int_e^{e^2} g(e^{-1}x)+5dx$$

$$= \int_1^e f(\ln x)dx + e\int_1^e g(x)+5dx = \int_1^e f(\ln x)dx + e\int_1^e f(\ln x)dx + 5e(e-1)$$

$$= (e+1)\int_1^e f(\ln x)dx + 5e^2 - 5e = 6e^2+4$$

$$(e+1)\int_1^e f(\ln x)dx = e^2+5e+4 = (e+1)(e+4)$$

$$\therefore \int_1^e f(\ln x)dx = e+4, \quad a^2+b^2 = 17$$

$sol2)$

$\int_1^e f(\ln x)dx$에서 우선 $\ln x$를 없애기 위해 $\ln x = t$로 치환하면 $\int_0^1 f(t)e^t dt$이 됩니다.
이를 바로 적분하긴 어려우니 조건식에서 이 모양이 나오도록 변형을 해보면,

$$6e^2+4 = \int_1^{e^2} g(x)dx, \quad x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$= \int_0^2 g(e^t)e^t dt = \int_0^1 g(e^t)e^t dt + \int_1^2 g(e^t)e^t dt = \int_0^1 f(t)e^t dt + \int_1^2 \{g(e^{t-1})+5\}e^t dt$$

$$= \int_0^1 f(t)e^t dt + e\int_0^1 \{g(e^x)+5\}e^x dx = \int_0^1 f(t)e^t dt + e\int_0^1 \{f(x)+5\}e^x dx$$

$$= (1+e)\int_0^1 f(x)e^x dx + 5e\int_0^1 e^x dx = (1+e)\int_0^1 f(x)e^x dx + 5e^2 - 5e$$

마찬가지로 계산하면 구하는 정적분값은 $e+4$임을 알 수 있습니다.