두 도형의 교점을 지나는 도형의 방정식

雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $l_1 : ax+by+c=0$, $l_2 : a'x+b'y+c'=0$에 대해, 편의상 두 직선은 한 점에서 만난다고 가정하고, 상수 k에 대해 다음과 같은 방정식 $f(x, y)$를 정의하자.

$$f(x, y)=(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$$

l_1과 l_2의 교점 $P(x_0, y_0)$에 대해

$$f(x_0, y_0)=(ax_0+by_0+c)+k(a'x_0+b'y_0+c')=0$$

이므로 방정식 $f(x, y)=0$은 두 직선의 교점을 지난다.

$$f(x, y)=(a+ka')x+(b+kb')y+(c+kc')=0$$

에서 $b+kb'\neq 0$이라면 이 방정식은 $y=-\dfrac{a+ka'}{b+kb'}x-\dfrac{c+kc'}{b+kb'}$라는 직선이 되어,

$k=-\dfrac{a+pb}{a'+pb'}$로 설정하면 기울기를 $p=-\dfrac{a'}{b'}$을 제외한 모든 실수 p으로 유도시킬 수 있다.

$p=-\dfrac{a'}{b'}$이면 k의 값이 정의되지 않으므로 해당 기울기의 직선인 직선 l_2는 만들 수 없고, 이는 직선의 기울기 $-\dfrac{a+ka'}{b+kb'}$에서 k를 무한대로 보냈을 때의 극한값과 같다.

또한 $b+kb'=0\neq b'$인 경우 $x=-\dfrac{c+kc'}{a+ka'}$인 y축과 평행한 직선도 만들 수 있다.

이를 보완하기 위해 $f(x, y)$를 실수 m, n에 대해

$$f(x, y)=m(ax+by+c)+n(a'x+b'y+c')=0$$

과 같이 정의한다면 이 방정식은 두 직선을 포함하여 교점을 지나는 모든 직선의 방정식을 나타낼 수 있다.

Ⅱ. 서로 다른 두 원의 교점을 지나는 원(직선)의 방정식

Ⅰ. 과 같은 방법으로 두 원

$$C_1 : x^2+y^2+Ax+By+C=0,\ \ C_2 : x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$$

의 교점의 개수에 따라 실수 k에 대해 방정식

$$f(x,y)=x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$

을 고려하자. 이때, $f(x,y)=0$은 1. 에서의 증명과 같은 방법으로 (교점이 존재한다면) 두 원의 교점을 지난다. 두 원은 일치하지 않으므로 일반성을 잃지 않고 모든 경우에 대해 $A\neq A'$으로 가정하고, 방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 원을 원 C_3, 원 C_1, C_2, C_3의 중심과 반지름을 각각 O_1, O_2, O_3, r_1, r_2, r_3라 하자.

1. 교점이 두 개인 경우

$$f(x,y)=(k+1)x^2+(k+1)y^2+(A+kA')x+(B+kB')y+(C+kC')$$

$$=x^2+y^2+\frac{A+kA'}{k+1}x+\frac{B+kB'}{k+1}y+\frac{C+kC'}{k+1}=0$$

($k\neq-1$로 가정, $k=-1$인 경우는 후술.)

$$k=-\frac{m-A}{m-A'}\text{ 이면}$$

$$f(x,y)=x^2+y^2+mx+\frac{m(B-B')+AB'-A'B}{A-A'}y+\frac{m(C-C')+AC'-A'C}{A-A'}=0$$

이 되어 $m\neq A'$인 모든 실수 m에 대해 중심의 x좌표가 $-\frac{m}{2}$인 원 C_3를 특정할 수 있다. 원 C_3의 중심은 두 교점을 이은 선분의 수직이등분선상에 위치하므로 원 C_3의 중심의 y좌표는 x좌표에 대해 종속적으로 결정된다. 원 C_3의 존재성을 대수적으로 보이기 위해 선분 O_1O_2의 길이 d_{12}에 대해

$$|r_1-r_2|<d_{12}<r_1+r_2$$

임을 이용하면 다음과 같다.

$$\left|\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}-\sqrt{\frac{A'^2+B'^2-4C'}{4}}\right|<\sqrt{\left(\frac{A'-A}{2}\right)^2+\left(\frac{B'-B}{2}\right)^2}<\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}+\sqrt{\frac{A'^2+B'^2-4C'}{4}}$$

d_{12}과 r_1+r_2는 모두 양수이므로 양변을 제곱한 후 양변에 4를 곱하면

$$(A^2+B^2-4C)+(A'^2+B'^2-4C')-2\sqrt{(A^2+B^2-4C)(A'^2+B'^2-4C')}<(A'-A)^2+(B'-B)^2,$$

$$(A'-A)^2+(B'-B)^2<(A^2+B^2-4C)+(A'^2+B'^2-4C')+2\sqrt{(A^2+B^2-4C)(A'^2+B'^2-4C')}\text{ 이고,}$$

$$r_1=\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}\ ,\ r_2=\sqrt{\frac{A'^2+B'^2-4C'}{4}}$$

임을 이용하여 식을 정리하면

$$-4r_1r_2<2C+2C'-AA'-BB'<4r_1r_2\cdots[1]$$이다.

한편 $k\neq-1$일 때 $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{A+kA'}{k+1}x+\frac{B+kB'}{k+1}y+\frac{C+kC'}{k+1}=0$에서 원 C_3가 존재할 조건은

$$\left(\frac{A+kA'}{k+1}\right)^2+\left(\frac{B+kB'}{k+1}\right)^2-4\left(\frac{C+kC'}{k+1}\right)>0,$$

$$\frac{1}{4(k+1)^2}\{(A+kA')^2+(B+kB')^2-4(k+1)(C+kC')\}>0,$$

$$A^2+B^2-4C+k^2(A'^2+B'^2-4C')+k(2AA'+2BB'-4C-4C')>0$$

이다.

원의 존재 여부를 판정해주는 위 '판별함수'를

$$f(k)=k^2(A'^2+B'^2-4C')+k(2AA'+2BB'-4C-4C')+A^2+B^2-4C,$$

$$f(k)=4r_2^2k^2+k(2AA'+2BB'-4C-4C')+4r_1^2$$

으로 정의하면, 최고차항의 계수 $4r_2^2$은 양수이므로 판별함수의 판별식

$$\frac{D}{4}=(AA'+BB'-2C-2C')^2-16r_1^2r_2^2<0$$에서

$$(AA'+BB'-2C-2C')^2<16r_1^2r_2^2$$

이고, 이는 [1]의 결과와 일치한다. 따라서 두 교점을 지나는 원 C_2를 제외한 임의의 원 C_3는 그에 따른 $k\neq-1$인 실수 k가 존재하고, 모든 실수 k에 대해 그에 따른 원 C_3가 존재한다.

O_3의 x좌표가 $-\frac{A'}{2}$이면 실수 k의 값을 정의할 수 없으므로 $f(x,y)=0$은 원 C_2를 나타낼 수 없다.

2. 교점이 한 개인 경우

1. 과 같은 방법으로

$$d=\left|r_1-r_2\right| \text{ 또는 } d=r_1+r_2$$

임을 이용하면,

$$2C+2C'-AA'-BB'=\pm 4r_1r_2,$$

$$f(k)=4r_2^2k^2+k(2AA'+2BB'-4C-4C')+4r_1^2=4(r_1k\pm r_2)^2\geq 0$$

이다. 특히, $k=(-1)^n\dfrac{r_2}{r_1}$일 때 원 C_3는 퇴화하여 원 C_1과 C_2의 접점과 일치한다.
($d=\left|r_1-r_2\right|$, 내접하면 $n=1$, $d=r_1+r_2$, 외접하면 $n=0$이다.)

O_3의 좌표는

$$O_3\left(-\frac{m}{2},\ -\frac{m(B-B')+AB'-A'B}{2(A-A')}\right)$$

이고, 이는 직선 $y=\dfrac{B-B'}{A-A'}x+\dfrac{A'B-AB'}{2(A-A')}$위의 점이다. 이 직선의 방정식에 $O_1\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$, $O_2\left(-\dfrac{A'}{2},\ -\dfrac{B'}{2}\right)$를 대입하면 성립하므로, 직선은 두 점 O_1과 O_2를 이은 직선이 된다.

$k\neq -1$일 때 O_3는 직선 O_1O_2상에 존재하게 되어, 원 C_3는 원 C_1과 C_2의 접점에서 나머지 두 원과 동시에 접하게 된다.

이는 사고론적으로 (1)의 결과로부터 도출될 수 있는데, 두 교점을 점점 가까이 다가가게 하면 두 교점을 이은 선분의 수직이등분선은 결국 교점이 일치할 때의 접점에서 각 원에 그은 법선에 수렴한다는 것이다.

따라서 이 경우 $f(x,y)=0$은 원 C_2와 별개로 교점을 지나지만 그 중심은 직선 O_1O_2상에 존재하지 않는 원도 나타낼 수 없다.

3. 교점이 없는 경우(만나지 않는 경우)

마찬가지로 두 원이 만나지 않을 조건

$$d>r_1+r_2 \text{ 또는 } d<\left|r_1-r_2\right|$$

에서

$$4r_1r_2 < 2C+2C' - AA' - BB'$$

또는

$$2C+2C' - AA' - BB' < -4r_1r_2$$

이다. 판별함수의 판별식

$$\frac{D}{4} = (AA' + BB' - 2C - 2C')^2 - 16r_1^2r_2^2 > 0$$

이므로 판별함수의 함숫값이 음수인 구간이 존재한다. 짝수 근의 공식을 이용하여 판별함수의 영점을 조사하면 다음과 같다.

$$k = \frac{(2C+2C' - AA' - BB') \pm \sqrt{(2C+2C' - AA' - BB')^2 - (A^2 + B^2 - 4C)(A'^2 + B'^2 - 4C')}}{A'^2 + B'^2 - 4C'}$$

따라서

$$k \geq \frac{(2C+2C' - AA' - BB') + \sqrt{(2C+2C' - AA' - BB')^2 - (A^2 + B^2 - 4C)(A'^2 + B'^2 - 4C')}}{A'^2 + B'^2 - 4C'}$$

또는

$$k \leq \frac{(2C+2C' - AA' - BB') - \sqrt{(2C+2C' - AA' - BB')^2 - (A^2 + B^2 - 4C)(A'^2 + B'^2 - 4C')}}{A'^2 + B'^2 - 4C'}$$

일 때 원 C_3의 반지름이 0이상이 되어 원 C_3가 존재한다.

k가 정확히 그 경계값일 때 원 C_3는 점으로 퇴화하고, 그 좌표는 위의 k에 대해

$$K\left(-\frac{A+kA'}{2(k+1)},\ -\frac{B+kB'}{2(k+1)}\right)$$

이다. 점 P에서 중심이 점 O, 반지름이 r인 원 Γ에 대한 방멱은 다음과 같이 정의된다.

$$Pow_{\Gamma}(P) \equiv \overline{OP}^2 - r^2$$

이를 좌표평면에 도입하여 해석적으로 표현하면 중심의 좌표 (a, b), 반지름이 r인 원

$$h(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

에 대한 점 $P(x_0, y_0)$의 방멱은 다음과 같다.

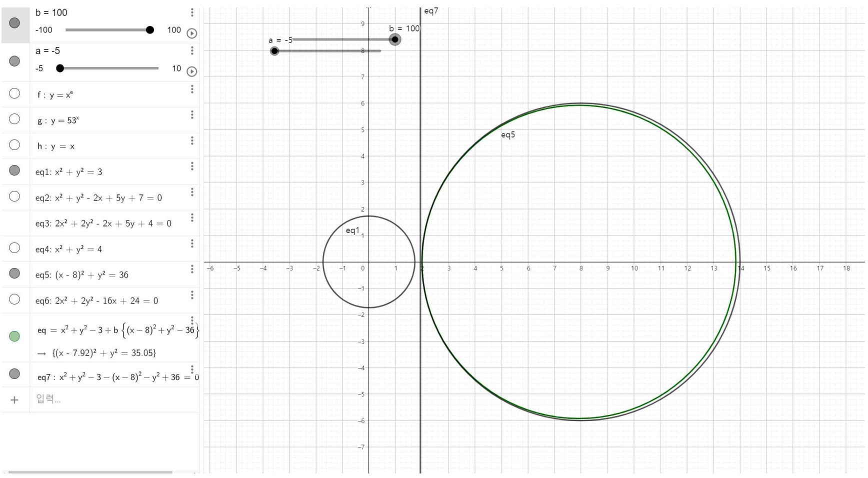
$$Pow_{\Gamma}(P) = \overline{OP}^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = h(x_0, y_0)$$

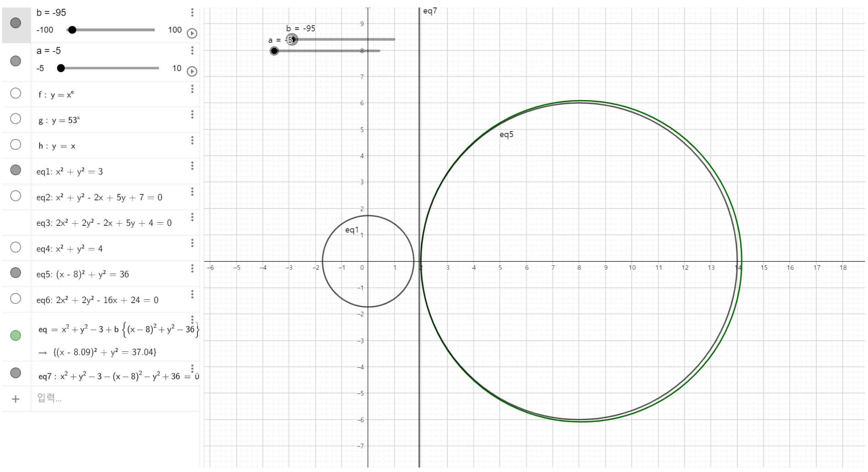
따라서,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + Ax + By + C + k(x^2 + y^2 + A'x + B'y + C') = 0$$

을 만족하는 점들의 자취는 $k \neq -1$일 때 원 C_1과 원 C_2에 대한 방멱의 비가 $1 : \left(-\frac{1}{k}\right)$인 원이 된다. 원 위의 점에 대한 방멱은 0이므로, 방정식 $f(x, y) = 0$이 원 C_2를 나타내려면 방멱의 비는 $1 : 0$이 되어야 한다.
즉 $-\frac{1}{k} = 0$이어야 하고 이를 만족하는 실수 k는 존재하지 않는다.

실제로 다음 그림처럼 k를 양의 무한대 혹은 음의 무한대로 보냈을 때 원 C_3는 원 C_2에 점점 근접하는 양상을 보인다. (k가 양의 무한대로 발산하느냐 음의 무한대로 발산하느냐에 따라 C_2에 접근하는 방향은 내부와 외부로 나뉜다.)





(그림에서 k의 역할을 하는 b의 값과 그때의 녹색 자취가 나타내는 원 C_3에 유의한다.)

위 세 가지 경우 역시 실수 m, n에 대해

$$f(x, y) = m(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + n(x^2 + y^2 + A'x + B'y + C') = 0$$

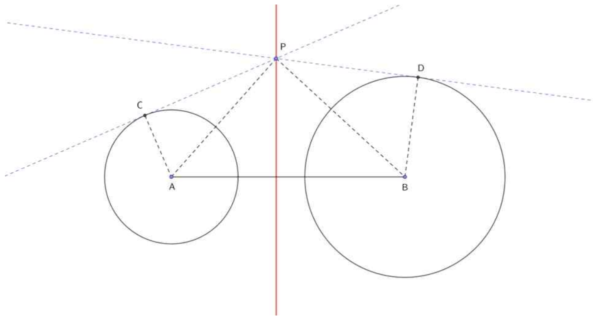
으로 정의하여 원 C_2를 나타낼 수 있다.

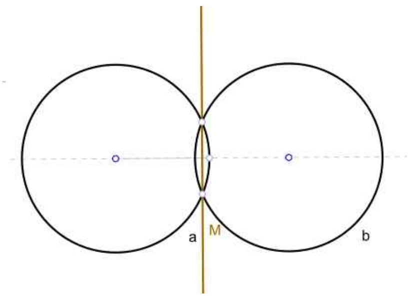
4. 번외 : $k = -1$인 경우

$k = -1$이면 x와 y의 이차항이 소거되어 다음의 직선의 방정식이 유도된다.

$$(A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0$$

이는 (3)의 해석에 기반하여 원 C_1과 원 C_2에 대한 방멱의 비가 $1:1$, 즉 두 원에 대한 방멱이 같은 점들의 집합이라고 볼 수 있다. 이 직선을 특별히 근축이라 부른다. 근축은 위 방정식에서도 알 수 있듯이 두 원의 중심을 잇는 직선의 수선을 이루고, 두 원이 만나지 않는 경우 두 원의 외부에 있다.
또한, 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원의 근축은 두 원의 공통현이고, 한 점에서 접하는 두 원의 근축은 접점에서의 공통 접선이다.
이로서 (1)과 (2)의 경우에 대해서도 $k = -1$인 경우가 존재함을 보였다.





Ⅲ. 두 도형의 교점을 지나는 도형의 방정식

두 도형 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$이 만날 때, 그 교점을 지나는 도형의 방정식 $h(x, y) = 0$은 상수 m, n에 대해 $h(x, y) = mf(x, y) + ng(x, y) = 0$으로서 표현된다. $f(x, y) = 0$과 $g(x, y) = 0$의 모든 교점 $P_n(x_n, y_n)$에 대해 $f(x_n, y_n) = g(x_n, y_n) = 0$이 성립하므로, $h(x_n, y_n) = 0$이 된다.
그러나 이 경우 $h(x, y) = 0$의 차수는 $f(x, y) = 0$과 $g(x, y) = 0$의 차수 중 최댓값 이하로 제한되므로 모든 도형을 표현할 수 있는 것이 아니고, 2. - (2)처럼 경우에 따라서는 차수 조건을 만족하면서도 표현하지 못하는 도형이 존재할 수도 있다. 차수에 제약을 두지 않고 방정식을 구성하는 방법으로는 $f(x, y) = 0$과 $g(x, y) = 0$의 모든 교점에서 정의되는 두 방정식 $F(x, y) = 0$과 $G(x, y) = 0$에 대해 방정식 $h(x, y) = 0$을 다음과 같이 정의하는 방법이 있다.

$$h(x, y) = F(x, y)f(x, y) + G(x, y)g(x, y) = 0$$

그러나 교점을 지나는 모든 도형에 대한 방정식을 보장하지 않으며, 위에서 논한 것과 같은 특정 조건 하에서 특정 도형에 대한 방정식만을 보장할 것으로 보인다.