수열의 해석적 확장

雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 수열

- 수열이란 직관적으로 수를 나열한 것이다. 나열한 각 수는 항이라고 부르는데, 각 항에는 순서가 있으므로, 수열의 항을 이를 나열한 순서대로 자연수에 대응시키면 수열의 모든 항은 자연수와 대응된다. 이에 기반한 수열의 엄밀한 정의는 다음과 같다 :

적당한 정수 n_0에 대하여 $\mathbb{D}=\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$의 꼴로 나타낼 수 있는 정의역을 갖는 함수를 수열이라고 한다. $n \in \mathbb{D}$에 대하여 수열 $a : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$의 함숫값은 a_n으로 나타내며, a_{n_0}를 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 또는 초항이라고 부른다.

- 이를 한정기호를 사용하여 표현하면 수열 f는 다음과 같이 정의된다 :

$$\exists n_0 \in \mathbb{Z} \text{ s. t. } dom(f) := \mathbb{D} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}.$$

- 위 정의에 입각한 수열 $\{a_n\}$의 정의역 $\mathbb{D}$는 위로 유계가 아니지만, 수열의 정의역이 유계인 경우 그러한 수열을 유한수열이라고 부른다. 이와 반대로 위로 유계가 아닌 수열은 무한수열이라고 부른다.

- 위 정의에서는 수열 $\{a_n\}$의 공역을 실수 집합인 것으로 명시하였는데, 이는 실수열이라 부르는 수열이고, 공역이 유리수 또는 무리수인 집합은 각각 유리수열과 무리수열이다. 공역이 $\mathbb{R}^n$인 수열은 벡터수열이라고 한다.

- 위 정의에 의하면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 a_1일 수도 있고, a_{-10}일 수도 있다. 초항의 첨자 n_0부터 순차적으로 제 n_0+i번째 항이 정의되기만 하면 되는 것이므로, 초항의 첨자가 음수가 되어도 문제는 없다. 보통 초항의 첨자는 $n \geq n_0$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n이 정의되도록 하는 최소 정수 n_0의 값으로써 결정된다. 또한, 첫째항에 대한 단서가 전혀 없는 경우에는 문맥에 따라 a_0 또는 a_1을 수열의 초항으로 생각한다.

예를 들어, 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n := \frac{\sqrt{5}(n^2-7n) \cdot e^{\pi}}{(n+1729)(n+23)(n+14)^2}$$

으로 주어졌을 때, $n \geq n_0$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n이 정의되기 위한 정수 n_0의 최솟값은 -13이므로 수열 $\{a_n\}$의 초항은 a_{-13}이다.

Ⅱ. 수열의 해석적 확장(Analytic Continuation)

- 해석적 확장이란 실수에서만, 또는 특정 조건에서만 정의되는 함수를 복소수로 확장하거나, 그 특정 조건을 완화시키는 방법이다. 일반적으로는 정의역이 실수 전체 집합의 부분집합인 함수의 정의역을 실수 전체 또는 복소수로 확장시키는 방법이지만, 여기서는 수열의 정의역을 자연수의 부분집합에서 실수 전체 집합으로 확장시키는 방법에 대해서 논할 것이다.

- 수열의 해석적 확장은 수열이 정의된 형태에 따라 가능할 수도 있고, 불가능할 수도 있다. 정의역이 자연수라는 특성을 이용하여 다음과 같이 자연수 n의 약수의 개수로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 실수로의 확장이 불가능하다 :

$$a_n = n(A) \text{ where } A = \{d \in \mathbb{N} \mid n \equiv 0 \pmod d\} \text{ and } n \in \mathbb{N}.$$

- 이를 제외한 나머지 수열의 경우는 일반적으로 실수로 그 정의역을 확장하는 것이 가능하다. 위에서 언급한 것처럼 특정 값에 대해 수열의 값이 정의되지 않을 수는 있지만, 이는 해당 수열이 확장된 실함수의 불연속점 등과 같은 특이점으로 생각할 수 있는 부분이다. 위의 예시에서 언급된 수열

$$a_n := \frac{\sqrt{5}(n^2-7n)\cdot e^{\pi}}{(n+1729)(n+23)(n+14)^2}$$

의 정의역을 실수로 확장하면, 우선 가장 간단하게 n의 자리에 x를 대입한,
$x=-14,\ -23,\ -1729$에서 불연속이고 함숫값이 정의되지 않는 함수

$$f(x) := \frac{\sqrt{5}(x^2-7x)\cdot e^{\pi}}{(x+1729)(x+23)(x+14)^2}$$

를 생각할 수 있을 것이다. 그러나 이러한 함수는 유일하게 존재하지 않고, 미분가능하고 해석적인 함수로 한정하더라도 만약 존재할 경우 유일하게 존재할 수 없다. 즉 다음이 성립한다.

Theorem. 초항이 a_{n_0}인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ and } f(n) = a_n \text{ for } n_0 \leq \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ s. t. } g(n) = a_n \text{ for } n_0 \leq \forall n \in \mathbb{Z} \text{ and } f \neq g.$$

이는 $g(x) := f(x) + k\sin(\pi x)$로 정의함으로서 간단하게 증명되고, 0이 아닌 실수 k의 값이 변화함에 따라 이러한 함수가 무한히 많다는 사실도 알 수 있다. 그렇다면 특정 점화식을 만족하도록 정의된 수열이라면 어떨까? 이는 어떤 수열이 만족하는 점화식의 n의 자리에 x를 대입해도 만족하도록 할 수 있는 실함수가 항상 존재하는지에 대한 의문으로 이어진다.

- 점화식은 수열의 귀납적 정의로, 수열의 항을 그 이전의 항들의 함수로서 정의하는 것이다. 따라서, 초항이 a_{n_0}인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 만약 이 수열이 귀납적으로 정의되어 점화식이 존재한다면, 이 역시 하나의 실함수로 확장시킬 수 있을 것이다.

- 구간 $[n_0,\ n_0+1)$에서 정의된 함수 f가 존재한다면, 구간 $[n_0,\ \infty)$에서의 함숫값은 주어진 점화식에 의해 정의될 것이다. (점화식에서 나타나는 항들의 첨자는 최소 1 이상의 차이가 나므로, 위 구간에서만 정의하면 된다.) 이때 함수 f는 물론 위의 Theorem.에 의해 유일하지 않고, 이는 구간 $[n_0,\ n_0+1)$에서 정의하기 나름이므로 유일성을 지니지 않는다.

- 그러나 만약 f의 정의역을 $(-\infty,\ n_0)$로까지 확장시킨다고 하면, 다음과 같이 정의된 수열의 경우 a_{n_0-1}의 값을 특정할 수 없게 된다 :

$$a_n = (a_{n-1})^2,\ \ n \ge n_0.$$

- 만약 a_{n_0}가 음수라면 a_{n_0-1}의 값이 허수가 되어 실함수로 정의가 불가능하고, 양수라고 하더라도 가능한 값이 두 개 이상 존재하므로 이는 구간 $[n_0,\ n_0+1)$에서 함수를 정의하더라도 실수 전체를 정의역으로 가지게 되면 함숫값이 유일하게 결정되지 않을 수도 있다는 것을 시사한다.

- 수열의 정의역을 확장하는 대표적인 예시로는 감마 함수(Gamma Function)가 있다. $n!$과 같은 계승을 일반적인 실수로 확장한 함수로, 1730년 오일러가 제안하였다. 오일러는 처음 극한식의 식변형을 통해 무한곱 형태를 유도하였고, 이후 다음과 같은 정적분을 통해 계승을 실수 전체로 연속적으로 확장하였다 :

$$n! = \int_0^1 (-\ln t)^n dt.$$

위 정적분은 다음과 같이 계산할 수 있다 :

$$\begin{aligned} a_n &:= \int_0^1 (-\ln t)^n dt = (-1)^n \int_0^1 (\ln t)^n dt \\ &= (-1)^n \left\{ \left[t \cdot (\ln t)^n \right]_0^1 - \int_0^1 n \cdot (\ln t)^{n-1} dt \right\} \\ &= n \cdot \int_0^1 (-1)^{n-1} (\ln t)^{n-1} dt \end{aligned}$$

$$= na_{n-1}.$$

한편

$$a_1 = \int_0^1 -\ln t dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt = \left[e^t\right]_{-\infty}^0 = 1$$

이므로 수열의 귀납적 정의에 의해 $1 \le n \in \mathbb{N}$에 대하여 $a_n = n!$이 성립한다. 위 정적분에서 $-\ln t = x$로 치환하면, $t = e^{-x}$이고 $dt = -e^{-x}dx$, $\begin{cases} t \to 0 \Rightarrow x \to \infty \\ t \to 1 \Rightarrow x \to 0 \end{cases}$이므로

$$n! = \int_0^1 (-\ln t)^n dt = -\int_{-\infty}^0 x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

이고 이를 감마함수 $\Gamma(n+1)$로 정의한다. 즉 자연수 n에 대하여

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

이다. 팩토리얼(!)에 대한 등호는 n이 음이 아닌 정수일 때만 성립하므로 음이 아닌 정수 n에 대하여 다음이 자명하게 성립한다.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),\ \ \Gamma(1) = 1.$$

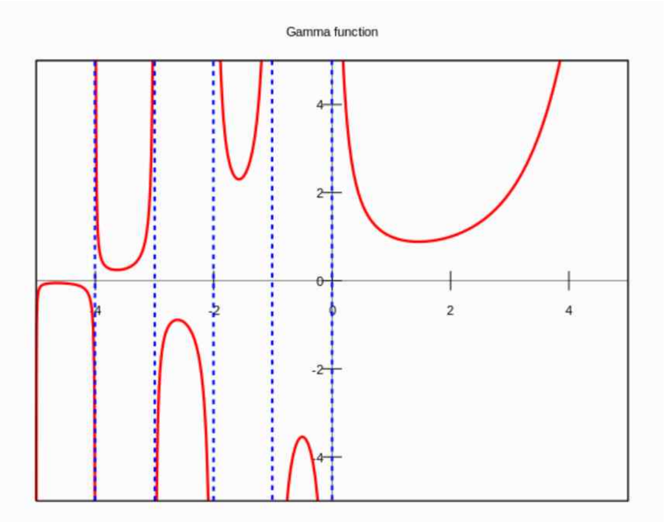
이를 양의 실수 x로 확장하면 다음과 같다 :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

n이 음이 아닌 정수일 때 성립했던 성질들이 이 함수에 대해서도 성립하는지 알아보기 위해, $\Gamma(x+1)$을 다음과 같이 부분적분을 통해 전개해본다.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

이로써 양의 실수 x에 대하여 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$가 성립함이 증명되었다. 이 식을 이용하면, 귀납적 정의로는 정의되지 않았던 $x < 0$일 때의 함숫값을 계산할 수 있다. 다만 x가 음의 정수일 때는 계승의 기본 성질인 $1 = 0! = (-1)! \times 0$을 만족하는 $(-1)!$의 값이 존재하지 않아 정의되지 않고, 실제로 음의 실수 영역까지 확장된 감마 함수는 x가 음의 정수가 되는 지점에서 무한 특이점을 갖는다.



- 감마 함수의 적분꼴 형태는 x가 복소수일 때 x의 실수부가 양수이기만 하면 수렴하므로, 정의역은 복소수로까지 확장될 수 있다. 실제로 복소수에 대한 감마 함수의 함숫값은 오일러의 공식 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$를 통해 유도할 수 있다.

Ⅲ. 참고문헌

김백진, 지오북스, *맛있는 해석학*, 2018.

위키백과, *감마 함수*, 2020. 11. 19.
https://ko.wikipedia.org/wiki/%EA%B0%90%EB%A7%88_%ED%95%A8%EC%88%98

위키백과, *특이점(해석학)*, 2020. 04. 24.
https://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%8A%B9%EC%9D%B4%EC%A0%90_(%ED%95%B4%EC%84%9D%ED%95%99)

위키백과, *Analytic Continuation*, 2021. 07. 22.
https://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_continuation

Blog Spot, *감마 함수(Gamma Function)*, 2011. 12. 10.
https://ghebook.blogspot.com/2011/12/gamma-function.html