10.

$f(-1)=-2$이며 $(-1, f(-1))$의 접선이 $y=f(x)$와 두 점 $(-1, f(-1))$, $(5, f(5))$ 에서 접하고 y 절편이 7이다.
=> 다음 접선 식: $y=9x+7$

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 할 때,

$f(x)=a(x+1)^2(x-5)^2+9x+7$이다.
양변 미분시

=>$f'(x)=2a(2x-4)(x+1)(x-5)+9$

$x=2$대입시

$\therefore f'(2)=9$

12.

if) $f(x)$가 3차 이상의 다항식일 경우

$f(x)$가 n차 다항식이라 하자.

$$f(x)=x^2f'(x)-7x^3+6x+\int_0^x f(x)dx-a$$

다음 식의 좌변의 최고차항은 n차 우변의 최고차항은 n+1차이므로 모순

$\therefore$ 함수 $f(x)$는 최고차항이 2차 이하인 다항식

$let.\ f(x)=px^2+qx+r$

(1)식에 대입시

3차항 계수 비교: $0=2p-7+\dfrac{1}{3}p$

=> $p=3$

2차항 계수 비교: $p=q+\dfrac{1}{2}q$

=> $q=2$ ($\because p=3$)

1차항 계수 비교: $q=6+r$
=> $r=-4$ ($\because q=2$)

상수항 비교: $r=-a$
=> $a=4$ ($\because r=-4$)

$\therefore a=4$

14.

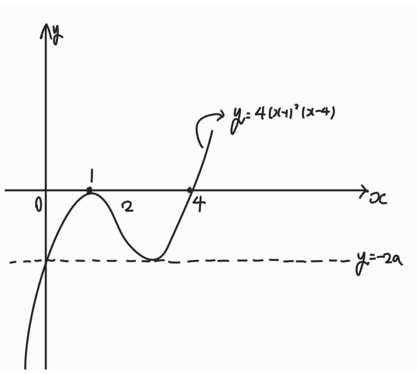
if) $a=0$
방정식 $|f(x)|=a$의 서로 다른 실근의 개수 2개이므로 불가능

$\therefore a\neq 0$

$|f(x)|=a$
=> $4(x-1)^2(x-4)=0 \text{ or } -2a$ $(\because a\neq 0)$

방정식 $4(x-1)^2(x-4)=0$의 서로 다른 실수의 개수는 2개이므로
방정식 $4(x-1)^2(x-4)=-2a$의 서로 다른 실근의 개수 2개여야 한다.

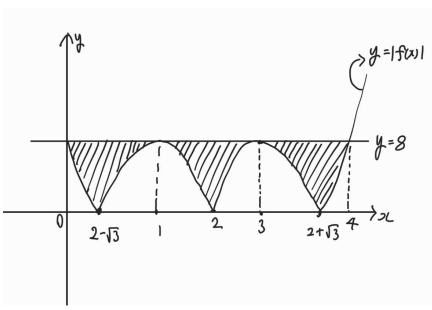
다음 조건을 만족하기 위해서는 다음 그림과 같다



$-2a$ 값의 크기는 함수 $f(x)$의 극솟값이다.
=>$-2a=f(3)=-16$

$\therefore a=8$

좌표평면 상에 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=a$를 표현할 시 그림과 같다.



이 때, 두 함수로 둘러싸인 부분은 색칠된 부분과 같으므로 색칠된 영역의 넓이를 구해보자.

$$\begin{aligned}(\text{색칠된 영역의 넓이}) &= 8\times 4-\int_0^4 |f(x)|\,dx \\ &= 12\end{aligned}$$

20.

by (가)조건

$\int_{2}^{x} f(x) \cdot g(x)dx = a(x-1)^3 + \int_{2}^{4} f(x)dx$

양변 미분시

=> $f(x) \cdot g(x) = 3a(x-1)^2$-----------(1)

두 함수 $f(x), g(x)$는 모두 일차함수이므로

$f(x) = n(x-1), g(x) = m(x-1)$라고 하자.

$\therefore nm = 3a$----------(2)

(가) 식에서 $x = 2$대입시

$a + \int_{2}^{4} f(x)dx = 0$ 만족

=>$a + 4n = 0$

(2)식에 다음 식 대입시

$\therefore m = -12$

by (나)조건

$-6\int_{b}^{x} \{f(x) + g(x)\}dx = f(x) \cdot g(x)$

$x = b$를 대입 시, $f(b) \cdot g(b) = 0$을 만족

(1)에 의해

$\therefore b = 1$

양변 미분시

=>$-6(f(x) + g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

=>$-6(n+m) = 2nm$

$m = -12$ 대입시

$\therefore n = 4$

(2)식에 $n = 4, m = -12$대입시

$\therefore a = -16$

$\therefore |a+b| = |-16+1| = 15$

22.

$$\begin{aligned} g(x) &= [f(x)^2-8f(x)+a]\times[f(x)^2-8f(x)+16] \\ &= \left\{f(x)^2-8f(x)+\frac{a+16}{2}\right\}^2-(\frac{a-16}{2})^2 \\ &= \left\{(f(x)-4)^2+\frac{a-16}{2}\right\}^2-(\frac{a-16}{2})^2 \end{aligned}$$

1) $a\geq 16$일 때

모든 실수 x에 대해 $f(x)^2-8f(x)+\dfrac{a+16}{2}\geq 0$을 만족하므로

$f(x)=4$일 때, $g(x)=k$를 만족시키므로 문제 조건에 의해 모순

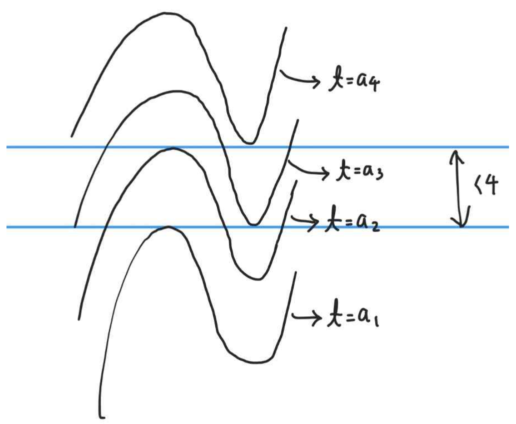
2) $a<16$일 때

$(f(x)-4)^2+\dfrac{a-16}{2}=0$일 때, $g(x)=k$를 만족시킨다.

방정식 $(x-4)^2+\dfrac{a-16}{2}=0$의 해를 $4-\beta$, $4+\beta$라 하자.

α의 값의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위가 $n<t<m$을 만족시키는 β의 값을 구해보자.

I) $2\beta<4$



그림과 같이 a_1, a_2, a_3, a_4 설정시

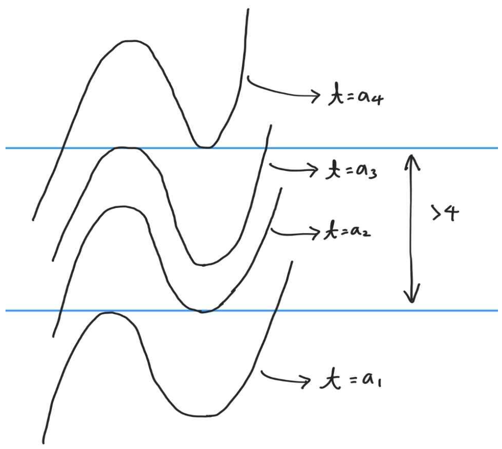
$t < a_1$일 때	$t = a_1$	$a_1 < t < a_2$	$t = a_2$
α의 값의 개수가 2	α의 값의 개수가 3	α의 값의 개수가 4	α의 값의 개수가 5
$a_2 < t < a_3$	$t = a_3$	$a_3 < t < a_4$	$t = a_4$
α의 값의 개수가 6	α의 값의 개수가 5	α의 값의 개수가 4	α의 값의 개수가 3

$a_4 < t$

α의 값의 개수가 2

=> α의 값의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위는 $a_1 < t < a_2$ or $a_3 < t < a_4$ (문제 조건에 의해 불가능)

II) $2\beta > 4$



그림과 같이 a_1, a_2, a_3, a_4 설정시

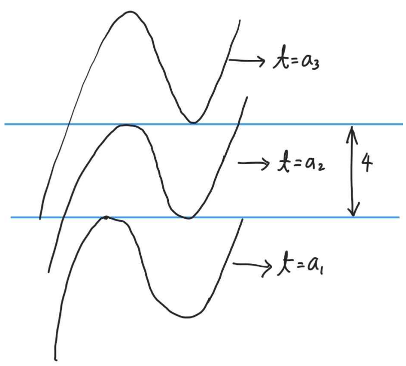
$t < a_1$일 때	$t = a_1$	$a_1 < t < a_2$	$t = a_2$
α의 값의 개수가 2	α의 값의 개수가 3	α의 값의 개수가 4	α의 값의 개수가 3
$a_2 < t < a_3$	$t = a_3$	$a_3 < t < a_4$	$t = a_4$
α의 값의 개수가 2	α의 값의 개수가 3	α의 값의 개수가 4	α의 값의 개수가 3

$a_4 < t$

α의 값의 개수가 2

=> α의 값의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위는 $a_1 < t < a_2$ or $a_3 < t < a_4$ (문제 조건에 의해 불가능)

III) $2\beta = 4$



그림과 같이 a_1, a_2, a_3 설정시

$t < a_1$일 때 　　 $t = a_1$ 　　 $a_1 < t < a_2$ 　　 $t = a_2$

α의 값의 개수가 2 　　 α의 값의 개수가 3 　　 α의 값의 개수가 4 　　 α의 값의 개수가 4

$a_2 < t < a_3$ 　　 $t = a_3$ 　　 $a_3 < t$

α의 값의 개수가 4 　　 α의 값의 개수가 3 　　 α의 값의 개수가 3

=>α의 값의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위가 $a_1 < t < a_3$ (문제 조건 만족)

$\therefore 2\beta = 4$

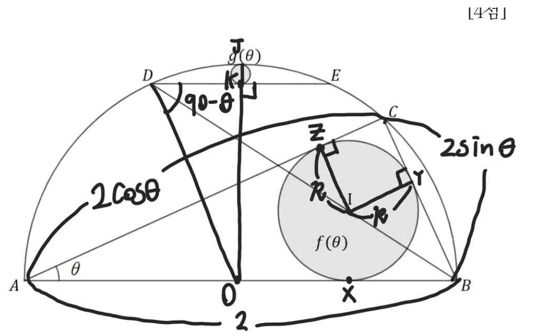
=>$f(x) = 2 \text{ or } 6$일 때, $g(x) = k$성립

이 때, a_1, a_3을 구해볼 시 $a_1=-2$, $a_3=6$

방정식 $(x-4)^2+\frac{a-16}{2}=0$의 해는 -2 or 6 이므로 $x=2$ or $x=6$을 대입시 $a=8$임을 알 수 있다.

$\therefore a+n+m=8-2+6=12$

28.



그림과 같이 점 $\mathrm{X, Y, Z, J, K}$설정

$$
\begin{aligned}
R &= \overline{\mathrm{IZ}} \\
&= \frac{\overline{\mathrm{ZC}} + \overline{\mathrm{CY}}}{2} \\
&= \frac{\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{AB}}}{2} \\
&= \sin\theta + \cos\theta - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\angle \mathrm{EDO} &= \angle \mathrm{EDB} + \angle \mathrm{BDO} \\
&= \angle \mathrm{DBA} + \angle \mathrm{DBA} \ (\because \text{이등변 삼각형 and 엇각}) \\
&= \angle \mathrm{ABC} \\
&= 90 - \theta
\end{aligned}
$$

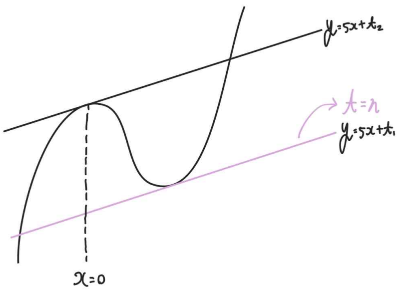
$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\overline{\mathrm{JK}}}{2} \\
&= \frac{\overline{\mathrm{OJ}} - \overline{\mathrm{OK}}}{2} \\
&= \frac{1-\cos\theta}{2} \ (\because \angle \mathrm{EDO} = 90 - \theta)
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}{\theta^2 \times \left(\frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{2}\right)^2}
$$

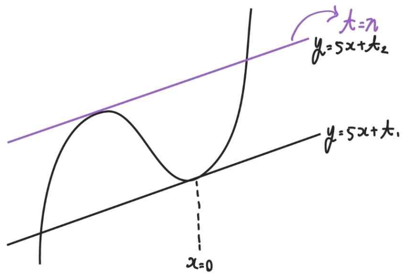
$$
= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{\sin^4\theta}{(1+\cos\theta)^2}}{\theta^2 \times \sin^2\theta \times \left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2} = \frac{1}{4}
$$

30.

(나)조건을 보면
함수 $g(t)$는 오직 $t=n$에서만 불연속이므로



[case1]



[case2]

다음 두 케이스 중 하나여야 한다.

양의 실수 α에 대하여 $f''(\alpha)=0$이므로 [case2]는 불가능하다.

$\therefore$[case1]으로 특정 가능

$*t<t_1$일 때

$g(t)=-a_{t_1}$ 이 때 함수 $g(t)$는 감소함수

$*t=t_1$일 때

$$
\begin{aligned}
g(t) &= -a_{t_1}+a_{t_2} \\
&= a+2a=3a
\end{aligned}
$$

$*t_1<t<t_2$일 때

$$
\begin{aligned}
g(t) &= -a_{t_1}+a_{t_2}+a_{t_3} \\
&= (a_{t_1}+a_{t_2}+a_{t_3})-2a_{t_1} \\
&= 3a-2a_{t_1}
\end{aligned}
$$
($\because$근과 계수와의 관계)

이 때 함수 $g(t)$는 감소함수

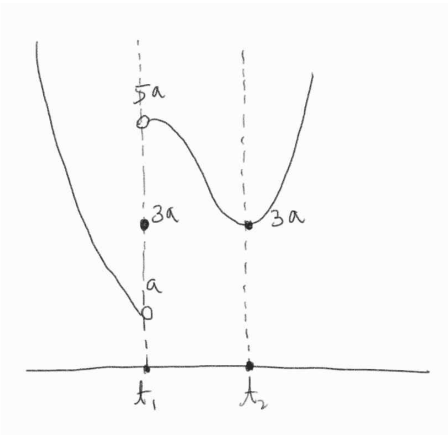
$*t = t_2$일 때

$g(t) = a_{t_1} + a_{t_2}$
$\quad = 0 + 3a = 3a$

$*t > t_2$일 때

$g(t) = a_{t_1}$
이 때 함수 $g(t)$는 증가함수

종합해보면 함수 $g(t)$의 그래프를 다음과 같이 나타낼 수 있다



다음 그래프를 통해 방정식 $g(t) = c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이기 위한 c의 값의 범위는 $3a < c < 5a$이다.

$\therefore a = 2$

=> $f(x) = (x+2)(x-4)^2 + 5x + t_1$

$x = -2$대입시

$f(-2) = -10 + t_1$=1 ($\because f(-2) = 1$)

$\therefore t_1 = 11$
=> $f(x) = (x+2)(x-4)^2 + 5x + 11$

$\therefore t_2 = f(0) = 43$

$t_1 < 36 < t_2$이므로

무수히 작은 양의 실수 δ에 대해 열린 구간 $(36-\delta, 36+\delta)$에서
$g(t) = -a_{t_1} + a_{t_2} + a_{t_3}$
$\quad = (a_{t_1} + a_{t_2} + a_{t_3}) - 2a_{t_1}$
$\quad = 3a - 2a_{t_1}$ ($\because$근과 계수와의 관계)

$let. k(t) = a_{t_1}$인 함수 $k(t)$가 있다 가정
* $a_{36_1} = -1$ 이므로 $k(36) = -1$을 만족

* 또한 열린 구간 $(36-\delta, 36+\delta)$에서

$g(t) = 3a - 2k(t)$ 다음 식을 만족
양변을 t에 대해 미분시

=> $g'(t) = -2k'(t)$

$\therefore g'(36) = -2k'(36)$--------(1)

* $f(a_{t_1}) = 5a_{t_1} + t$을 만족하므로

$f(k(t)) = 5k(t) + t$ 성립
양변 미분시

=> $f'(k(t))k'(t) = 5k'(t) + 1$
$t = 36$ 대입시

$f'(-1)k'(36) = 5k'(36) + 1$ ($\because k(36) = -1$)

$\therefore k'(36) = \frac{1}{15}$($\because f'(-1) = 20$)

(1)식에 $k'(36) = \frac{1}{15}$대입시

$\therefore g'(36) = -\frac{2}{15}$

$\therefore p + q = 15 + 2 = 17$