01. [로그 계산]

sol)

$(2\log_2 3)(3\log_3 2) = 6$

어쩐 일로 시작은 A형 1번보다 쉽네요!

02. [행렬 계산]

sol)

$X = E + A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$

여기서 모든 성분을 다 더하면 9이 나옵니다.

03. [벡터 계산]

sol)

$|\vec{a} - 2\vec{b}| = k$라 두고서 양변을 제곱해보면

$k^2 = |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 - 4\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} + 36 = 28$

이므로 $k = 2\sqrt{7}$ 이 답이 됩니다.

04. [간단한 삼각함수 처리]

sol)

합성이 썩 신통치 않으니 사인에 대하여 정리 해주는 편이 낫겠네요. 그러면

$f(x) = 8\sin x + 4(1 - 2\sin^2 x) + 1 = -8\sin^2 x + 8\sin x + 5$

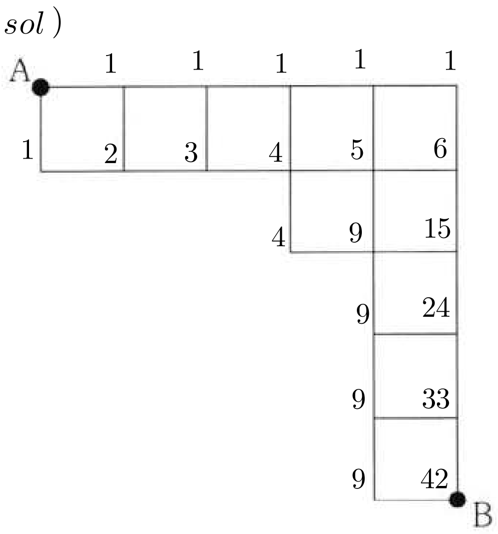
이고 $-1 \le \sin x = t \le 1$이라 치환해보면 $y = -8t^2 + 8t + 5$는

$t = \frac{1}{2}$에서 극댓값이자 최댓값을 가지므로 $f(x)$의 최댓값을 계산 해보면

$-8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = -2 + 4 + 5 = 7$이네요.

05. [길잡이 수]

sol)



항상 지나가는 길목을 잡아서 경우를 적절히 나누어서 구한 다음 취합하여도 되겠구요. 그 밖에도 여러 가지 풀이가 있겠지만 아무래도 길잡이 수가 가장 빠른 풀이가 될 것 같습니다. 답은 42가 됩니다.

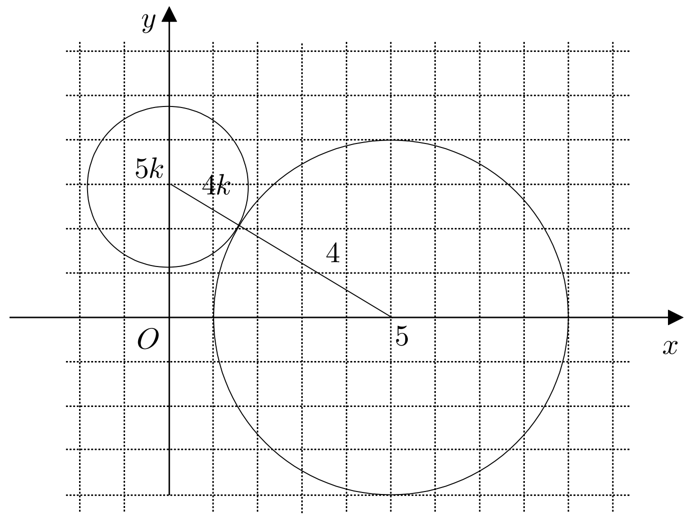
06. [같은 의미의 다른 표현]

sol)

세 줄에 걸쳐 설명하는 상황을 한 문장으로 압축하면

중심이 $(0, 5k)$고, 원 C_1에 외접하는 원의 반지름이 $4k$

라고 할 수 있겠네요. 빠른 이해를 위해 그림을 그려봅시다.



$25 + 25k^2 = (4 + 4k)^2$를 정리하면 $9k^2 - 32k + 9 = 0$이고

$D/4 = 16^2 - 9^2 > 0$이니, 따라서 서로 다른 두 실근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\frac{32}{9}$가 되겠네요.

07. [지수로그 실생활]

sol)

$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S$에서 변화하는 수치에 주목하여 묶어내면

$C + \log_3 9D - \log_9 3S = \log_2 P + 2 - \frac{1}{2} = \log_2 2\sqrt{2}P$가 되어

$k = 2\sqrt{2}$가 정답이 됩니다. 이 문제가 첫 A, B형 공통 문항이네요.

08. [분수 부등식]

sol)

이 문제는 좀 특이하네요. 식을 다 알려줬고 그리 복잡하지도 않으니 바로 세 종류의 구간에 대하여 온전한 식을 넣어서 풀어도 됩니다.

$x < -2$이면 $\frac{x+1}{-2} > x$에서 $x = -3, -4, \cdots, -9$가 되고,

$-2 \le x < 2$이면 $\frac{x+1}{x+1} > x$에서 $x = -2, \cancel{-1}, 0$이고,

$x \ge 2$이면 $\frac{x+1}{3} > x$에서는 만족하는 값이 없습니다. 고로,

$7 + 2 + 0 = 9$개가 정답이 됩니다. 이 정도 암산은 할 수 있겠죠?

※ 만약에 평소에 풀 듯 적당히 분수식을 동치변형 해서 풀려니

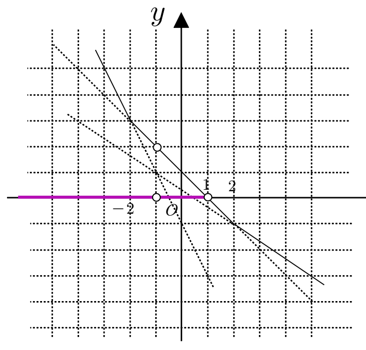
$\frac{x+1}{f(x)} - x > 0$의 무연근 후보는 $x = -1$뿐인데

$\frac{x}{f(x)}\left\{\frac{x+1}{x} - f(x)\right\} > 0$의 무연근 후보는 $x = -1, 0$으로 동치변형

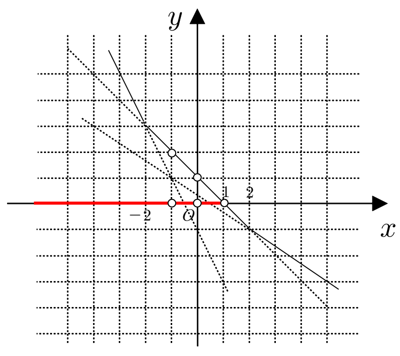
했노라고 말하기가 껄끄러워지네요. 그래서 이를 그래프로 관찰해보았습니다.

포만한 수학 연구소

$\dfrac{x+1}{f(x)} - x > 0$

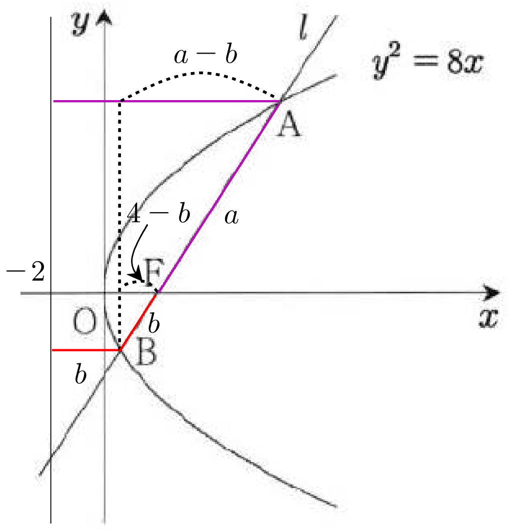


$\dfrac{x}{f(x)}\left\{\dfrac{x+1}{x} - f(x)\right\} > 0$



09. [포물선의 성질보다는 계산]

sol)



$a+b=14$이고, 삼각형 닮음비에 의해

$$b:(4-b)=(a+b):(a-b)$$

를 풀어보면

$$14(4-b)=b(a-b)=b(14-2b)$$

$$\rightarrow\ 2b^2-28b+56=2(b^2-14b+28)=0$$

이고, 기울기가 양수이므로 $a>b$이니 $b=7-\sqrt{21}$, $a=7+\sqrt{21}$이 됩니다. 숫자가 좀 지저분하네요! 그리고 기울기를 $m=\tan\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

이고, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\dfrac{7}{3}$에서 $m^2=\dfrac{4}{3}$로 답은 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이 됩니다.

참신하다기 보다는 정석 같은데 등장할 만한 평범한 문제네요.

10. [표준정규분포함수에서의 대칭적 관계]

sol)

확률변수 X, Y에 대하여 $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$를 구할 필요도 없이

$$P(X\le k)=P(Y\ge k)=P(3X\ge k)=P\left(X\ge\frac{k}{3}\right)\ (\because(\text{나}))$$

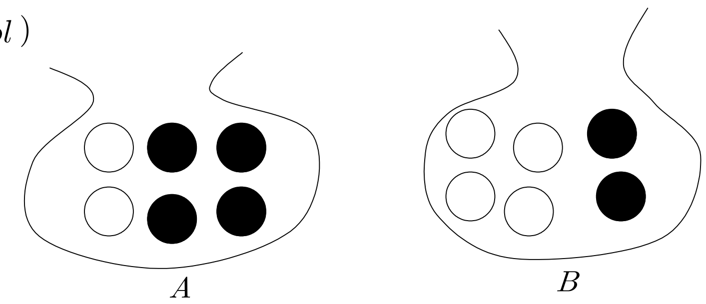
와 (가) 조건으로부터 k와 $\dfrac{k}{3}$이 $m=E(X)=10$대칭이어야 함을 이용하여

$$10=\frac{1}{2}\left(k+\frac{k}{3}\right)=\frac{2}{3}k$$

에서 $k=15$를 이끌어낼 수 있습니다.

11. [조건부 확률]

sol)



A 주머니에서 만약 검은 공만 두 개 꺼냈다면 조건을 만족할 수 없습니다. 주어진 상황을 만족하려면, 각 주머니마다 검은 공을 세 개만 갖고 있어야 하므로 처음에 A 주머니에서 검은 공을 적어도 하나는 꺼내야 합니다. 그래서 크게 두 가지 경우로 A 주머니에서 공을 꺼내는 사건을 분류하길, 검은 공만 두 개 꺼내는 것과 검은 공(B)과 흰 공(W)을 하나씩 꺼내는 것입니다.

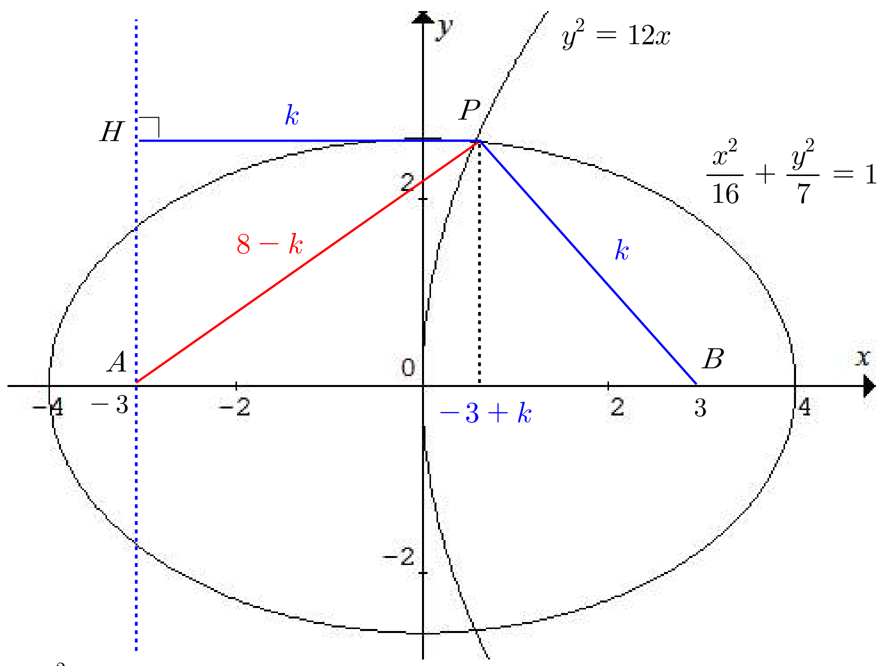
꺼내는 곳	A	B	
처음	$WWBBBB$	$WWWWBB$	$\dfrac{{}_4C_2}{\cancel{{}_6C_2}}\cdot\dfrac{{}_4C_1\cdot\cancel{{}_4C_1}}{\cancel{{}_8C_2}}$
A 주머니	$WWBB$	$WWWWBBBB$	
B 주머니	$WWWBBB$	$WWWBBB$	
처음	$WWBBBB$	$WWWWBB$	$\dfrac{{}_2C_1\cdot\cancel{{}_4C_1}}{\cancel{{}_6C_2}}\cdot\dfrac{{}_5C_2}{\cancel{{}_8C_2}}$
A 주머니	$WBBB$	$WWWWWBBB$	
B 주머니	$WWWBBB$	$WWWBBB$	

따라서 답은 $\dfrac{24}{24+20}=\dfrac{6}{11}$이 됩니다. 미리 약분해주는 센스~

12. [이차곡선의 성질 그대로]

sol)

일단 그림을 그려보고 위치 관계를 파악해봅시다.



$\overline{\text{HA}}^2$에 대하여 식을 연립해보면

$$(8-k)^2-k^2=12(-3+k)\ \rightarrow\ k=\frac{25}{7}$$

가 정답이 되네요.

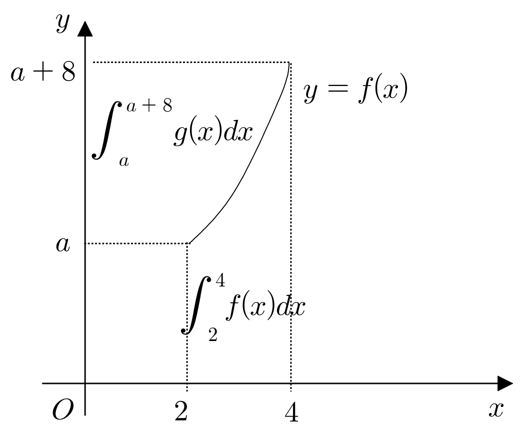
※ 파란색으로 표시한 포물선의 성질에서 비롯된 수치들과, 빨간색으로 표시한 타원의 성질에서 비롯된 수치들을 적절히 잘 써야 합니다. 수식들에 압도되어 정작 필요한 식을 쓰지 못하고 헤매게 될 수도 있으니까요!

13. [정적분 전환]

sol)

	$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{2k}{n}\right)$	$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+\frac{8k}{n}\right)$
x_k	$2+\frac{2k}{n}$	$a+\frac{8k}{n}$
dx_k	$\frac{2}{n}$	$\frac{8}{n}$
x_1(아래 끝)	2	a
x_n(위 끝)	4	$a+8$
정적분꼴	$\int_2^4 f(x)dx$	$\int_a^{a+8} g(x)dx$

준 식은 $\int_2^4 f(x)dx+\int_a^{a+8} g(x)dx=50$이 되고, 두 점 $(2,a)$와 $(4,a+8)$이 모두 제1사분면에 존재함에 착안하여 그래프로 나타내면



고로, $4(a+8)-2a=50 \;\to\; a=9$가 정답이 됩니다. 수능에도 몇 번씩 나왔던 개념이라 그다지 어렵지는 않았네요.

14. [귀찮은 적분 계산일지라도 거뜬하게]

sol)

식을 세워서 계산 실수 없이 그냥 계산하면 됩니다. 커다란 전략은 구의 온전한 부분이 아닌 구의 가운데 부분을 적분한 다음 양 옆의 원뿔 두 개 부피를 빼 주는 것입니다.

$$\pi\int_{-1}^{\sqrt{3}}(4-x^2)dx-\frac{1}{3}(3\pi\cdot 1+\pi\cdot\sqrt{3})$$

$$=\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}(3+\sqrt{3})$$

$$=\pi\left[4(\sqrt{3}+1)-\frac{3\sqrt{3}+1}{3}\right]-\frac{\pi}{3}(3+\sqrt{3})=\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{3}+\frac{8}{3}\right)$$

로 답은 $\frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$가 되네요.

※ 계산할 때의 팁이 있다면, π를 공통인수로 묶어냈을 때 나머지 항들은 $p\sqrt{3}+q$꼴이므로 유리수 p, q를 따로 따로 구해주는 것입니다. 물론, 부호도 조심하구요! 이런 문제는 답을 맞추는 것 못지 않게, 얼마나 빨리 구하는가도 중요합니다. 킬러도 아닌 문제를 질질 끌고 있으면 안 되니까요.

15. [근사하지 않은 풀이 vs 근사한 풀이]

$sol.1$) 근사하지 않은 풀이 - 출제자의 의도

문제에선 S_1과 S_2의 비의 극한값을 묻고 있지만 실제론 삼각형 넓이 구함에 있어 같은 길이 성분을 포함하고 있으니 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$를 대신 구해도 됩니다.

따라서 문제에서 요구하는 대로

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1-\frac{1}{2}t^2-\sqrt{1-t^2}}{\sin^4 t}$$

라고 세울 수 있고, 분자의 켤레꼴을 분모와 분자에 곱하면

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)^2-(1-t^2)}{(\sin^4 t)\left(1-\frac{1}{2}t^2+\sqrt{1-t^2}\right)}=\frac{\frac{1}{4}t^4}{(\sin^4 t)\left(1-\frac{1}{2}t^2+\sqrt{1-t^2}\right)}$$

가 되어 $\lim_{t\to+0}\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{8}$이 답이 됩니다.

$sol.2$) 근사한 풀이 - 테일러 전개 & 이항 전개에 의한

우선 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1-\frac{1}{2}t^2-\sqrt{1-t^2}}{\sin^4 t}$까지는 구했다고 합시다. 분모를 보아하니 최소한 사차항 수준의 근사를 원하고 있고, 평소에 하던대로(?!) $t\to+0$일 때 $\sqrt{1-t^2}\simeq 1-\frac{1}{2}t^2$으로 근사해버리면 답이 안 나오죠. 그래서, $\sqrt{1-t^2}\simeq 1-\frac{1}{2}t^2$를 사차항 수준으로 근사하면 됩니다.

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots$$

에서 지금은 $x=-t^2$, $n=\frac{1}{2}$이 대입된 상태이고, $t\to+0$이 보장되므로 $\sqrt{1-t^2}$를 사차항까지 근사해보면

$$\sqrt{1-t^2}\simeq 1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4$$

가 되어

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1-\frac{1}{2}t^2-\sqrt{1-t^2}}{\sin^4 t}\simeq\frac{1-\frac{1}{2}t^2-\left(1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4\right)}{t^4}=\frac{1}{8}$$

라고 동일한 결과가 나옵니다.

※ 이게 무슨 소리죠? 하시는 분들은 "몇몇 극한 문제들에서의 비밀 - 난짱극(http://cafe.naver.com/pnmath/355274)" 참고해주세요. 근사를 정확하게 숙지하고서 구사할 수 있다면 그냥 한 줄 만에 풀 수도 있지만, 수능이 100일 남짓 남은 시점에서 이런 풀이를 처음 접하신 분들은 넘어가셔도 상관없습니다!

16. [행렬 퍼즐]

sol)

요즘 추세에 걸맞는 무난한 문제네요. ㄷ이라는 퍼즐을 ㄱ, ㄴ 그리고 자신의 개인 역량으로 어떻게 풀어낼 것인가를 고민해야 하는.

ㄱ. $(A+2B)(2A-B)=E$로부터 $AB=BA$이니 참입니다.

ㄴ. 다시 ㄱ을 이용하여 $(A+2B)(2A-B)=E=2A^2-2B^2$가 되고,

$A+B$의 역행렬은 $\frac{1}{2}(A-B)$로 엄연히 존재하므로 참입니다.

혹여나 이 타이밍에

이런 문제는 항상 ㄱ,ㄴ,ㄷ이 전부 답이었지 ^오^

하는 악마의 속삭임에 섣불리 넘어갔던 분은 없겠죠?

ㄷ. $A^2-B^2=\frac{1}{2}E$인데 $A^2+B^2=\frac{1}{2}E$라 추가로 가정하면

두 식을 연립하여 $B^2=O$를 얻습니다. 물론,

『 이차정사각행렬 B에 대하여 $B^2=O$이면 $B=O$』

라는 것은 이 문제와 관련 없이 독립적인 상황이라면 거짓 명제겠지만, 지금까지 훑어온 추가 조건들로 인해 섣부른 판단을 내릴 수는 없습니다.

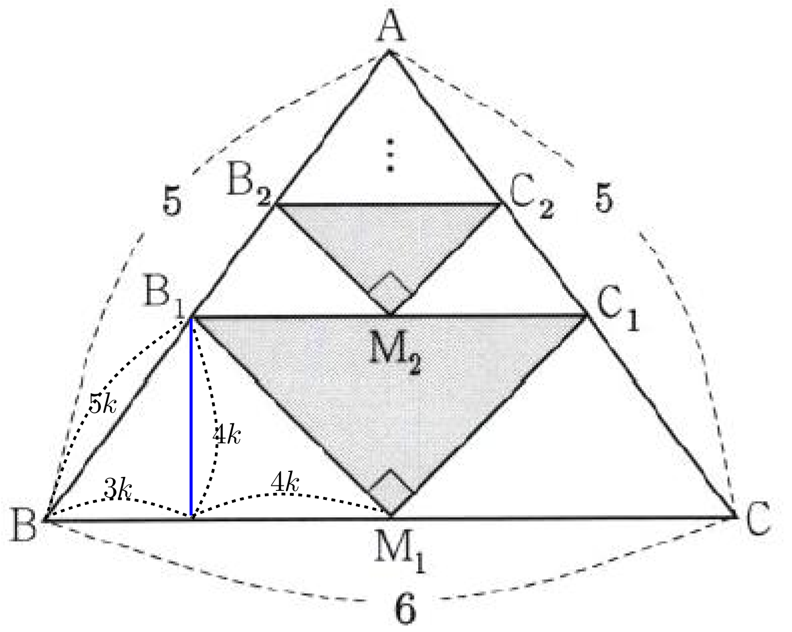
하지만 $B^2=O$이면 $A^2=\frac{1}{2}E$로 A의 역행렬이 존재하고, 따라서

$AB=O$의 양변의 왼쪽에서 A의 역행렬을 가하면 $B=O$가 됩니다.

고로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참입니다.

17. [보조선은 심플하게]

sol)



$\overline{AM_1}=4$로 지금 이 문제에는 $3:4:5$의 직각 삼각형이 숨어 있습니다. 숨어있기는 커녕 이정도면 대놓고 손까지 흔들고 있는 것 같네요. 파란색 보조선과 닮음비를 적절히 활용하여 $\overline{BM_1}=3=7k$를 구할 수 있습니다.

그리고 무한등비급수에서의 초항은 $16k^2$이고, 공비로는 이등변삼각형의 밑변 길이비의 제곱인 $6^2:(8k)^2$에서 $\left(\frac{4k}{3}\right)^2=\frac{16k^2}{9}$가 됩니다. 따라서,

$\dfrac{16k^2}{1-\dfrac{16k^2}{9}}=\dfrac{16\cdot\dfrac{9}{49}}{1-\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{9}{49}}=\dfrac{16\cdot9}{49-16}=\dfrac{16\cdot9}{33}=\dfrac{48}{11}$이 답입니다.

18.[점화식 & 기하학적 해석]

sol)

직각삼각형 OA_nB_n의 빗변 길이의 관점에서 계산해보면 $p=1$이 됩니다.

$$\overline{OD_n}=\overline{OB_n}+\overline{B_nD_n}=\overline{OB_n}+\overline{B_nC_n}$$
$$=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}+a_nb_n-r_n$$
$$\overline{OE_n}=a_n+r_n$$
$\overline{OD_n}=\overline{OE_n}$이므로
$$r_n=\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}\right)}{2}$$

즉, $\overline{OD_n}=\overline{OE_n}$으로 등치한 후 다시 r_n에 대해 정리해 준 것입니다.

그리고 다음 식의 r_n 부분에 넣으면 됩니다.

$$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2r_n=(\boxed{(나)})\times a_n\quad(n\ge1)$$

그러면 $a_n+a_n\left(b_n-1+\sqrt{1+b_n^2}\right)=a_n\left(b_n+\sqrt{1+b_n^2}\right)$와

$b_n=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)$로부터 (나)에 들어갈 식으로는

$$f(n)=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)=n+1$$

이 됩니다. 마치, $\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+4=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$로 바뀌는 것과 유사한

패턴입니다. 다음으로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=n+1$에서 축차대입법을 적용하여 더 쉽게 구할 수도 있지만, 문제의 증명과정을 따라서 구해봅시다. 잘 보면 수치들이 다음과 같이 변하고 있습니다.

$$a_{n+1}=(n+1)a_n$$
$$a_n=na_{n-1}$$
$$\vdots$$

따라서, $a_n=na_{n-1}=n(n-1)a_{n-2}=\cdots=n(n-1)\cdots2\cdot a_1$이고,

$a_1=2$라 초기에 제시하였으므로(이 부분이 낚시일 수도 있겠네요.)

$a_n=2n!$이 되어 $g(n)=2n!$이 됩니다. 고로, 정답은

$p+f(4)+g(4)=1+(4+1)+(2\cdot4!)=1+5+48=54$입니다.

※ 보통 수능에선 다단 편집을 사용하기 때문에 이런 증명 문제에는 수식만을 채워 넣기도 빠듯해서 그림까지 넣기가 힘든데, 사관학교 시험은 아무래도 공간의 제약을 덜 받아서 그런지 이러한 실험적인 문제도 나옵니다. 이과 기출문제 중에서는 벡터문제 빈칸 채우기로도 몇 번 나왔었구요. 덧붙여, 빈칸 주위만 깔짝깔짝 살펴봐서 풀기는 힘들고, 증명 과정 전체를 이해하여야 합니다. 부분 부분 쓰인 수학적인 내용은 그다지 어려운 부분이 아닌데 정보량이 많아지다 보니까 시험장에서의 압박 속에서 풀어내기가 힘들었을 수도 있다고 봅니다.

19. [상용로그의 지표와 가수의 의미]

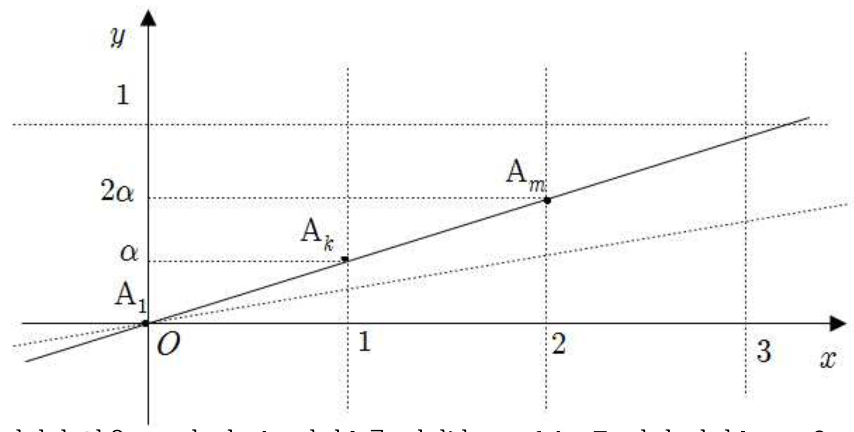
sol.1) 문과 버전

$A_1(0,0)$이고 $A_k(f(k),g(k)),\ A_m(f(m),g(m))$인데,

$f(k)=1,\ f(m)=2$임은 쉽게 알 수 있습니다. 그리고 세 점이 한 직선 상에 있으려면 $g(k)=\alpha\ \ (0\le\alpha<1)$라 했을 때 $g(m)=2\alpha$로

$0\le\alpha<\frac{1}{2}$가 되어야 합니다. 여기까지 조금 더 능동적으로

해석해보겠습니다.



여기서 상용로그의 지표는 자리수를 의미하므로 k는 두 자리 자연수, m은 세 자리 자연수여야 합니다. 다음으로 가수 α와 2α의 관계로 주의를 돌려봅시다. 만약 A_m을 가장 큰 세 자리 자연수 999에 대응시켜 버렸을 때, $2\alpha = \log 9.99$에서 $\alpha = \log\sqrt{9.99}$가 되고, $1 + \log\sqrt{9.99} = \log\sqrt{999} = \log k$로 k가 두 자리 자연수라는 사실에 모순이 됩니다. 즉, 이를 최대의 상황으로 만족시키려면 처음부터 999가 아니라 가장 큰 세 자리 완전 제곱수인 $31^2 = 961$을 잡았어야 했습니다. 그러면 $m = 961, k = 31$이 되고, $k + m = 992$가 정답이 됩니다.

> [2013년 06월 평가원 수학 영역(A형) 30번]
>
> **30.** 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]
>
> (가) $1 \le m < n < 100$
> (나) $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$
>
> 이 문제와 풀이가 유사하네요!

sol.2) 이과 버전

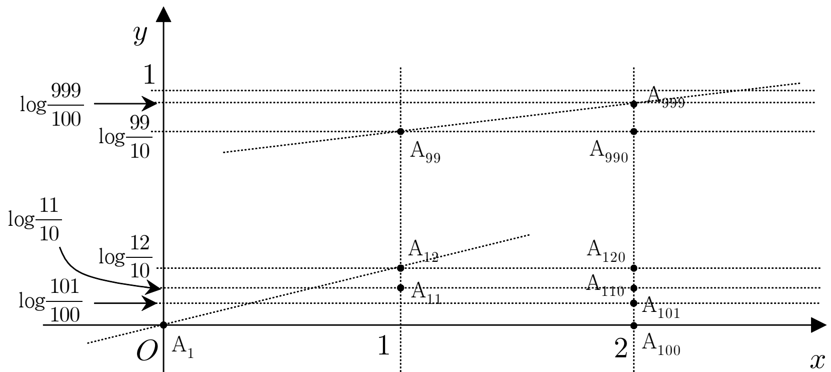
사실 이 문제가 문과 시험지에선 29번 주관식 문제였습니다. 그때 이전 해설이 자세하게 설명하는 것보다 직관적으로라도 최대한 친근하게 정답을 떠올릴 수 있길 의도했다면 이번에는 조금 더 적나라하게 살펴봅시다.

> [2008년 06월 평가원 수리(가형) 22번]
>
> **22.** 두 자리의 자연수 n에 대하여
> $\log_9 n - [\log_9 n]$이 최대가 되는 n의 값을 구하시오.
> (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]
>
> 이 문제 기억하시나요? 소수 부분을 취하는 $f(x) = x - [x]$라는 함수와 $g(x) = \log_9 x$라는 로그함수를 합성한 $(f\circ g)(x)$라는 함수의 정의역인 양의 실수 x 중에서도 다시 두 자리 자연수 n만을 취한 상황입니다. 굳이 그림으로 안 그려도 괜찮겠죠? 여기서
>
> $$0 = (f\circ g)(81) < (f\circ g)(82) < \cdots < (f\circ g)(90)$$
> $$< \cdots < (f\circ g)(78) < (f\circ g)(79) < (f\circ g)(80) < 1$$
>
> 라는 부등식이 성립하고 최대가 되는 n은 80이었습니다.

우선 두 점 $\mathrm{A}_k(f(k), g(k)), \mathrm{A}_m(f(m), g(m))$의 지표를 먼저 파악해보면 10 이상 1000 미만인 수에 대한 상용로그의 지표로서 $f(k) \le f(m)$이 1 이상 3 미만 정수여야 하므로 $f(k) = 1, f(m) = 2$일 수 밖에 없습니다. 그리고 가수를 보면

$$\begin{cases} g(k) = \log\frac{11}{10}, \log\frac{12}{10}, \cdots \log\frac{99}{10} \\ g(m) = \log\frac{100}{100}, \log\frac{101}{100}, \cdots, \log\frac{110}{100}, \cdots, \log\frac{999}{100} \end{cases}$$

이고, 이를 바탕으로 그래프 상에 $\mathrm{A}_k(f(k), g(k)), \mathrm{A}_m(f(m), g(m))$를 찍어보면 다음과 같습니다. (아직 찍지 않은 점들도 1000개 가까이 있습니다.)



이때 $k+m$값이 크게 하려고 A_{999}를 잡아버리면 A_1과의 중점 위치에 A_k가 존재하지 않습니다. $x = 1$ 위에는 비교적 성글게 $99 - 11 + 1 = 89$개의 점이 찍혀있는 반면, $x = 2$ 위에는 비교적 촘촘하게 $999 - 100 + 1 = 900$개의 점들이 찍혀있는데, 세로 간격이 등차수열이 아니라 로그적으로 증가율이 감소하고 있는 모양이니까요. 그런데 $g(k), g(m)$는 각각 $\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_m$의 y 좌표이자 자연수 k, m을 각각 상용로그 취했을 때의 가수 부분이므로 α와 2α의 관계를 유지하여야 합니다. 만약 $\alpha = \log\frac{11}{10}$으로 잡으면 $2\alpha = 2\log\frac{11}{10} = \log\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \log\frac{121}{100}$으로 두 자리수 k와 세 자리수 m간이 거듭제곱으로 연관된 관계임을 알 수 있습니다. 고로, $m = 961, k = 31$으로서 $k + m = 992$가 정답이 됩니다.

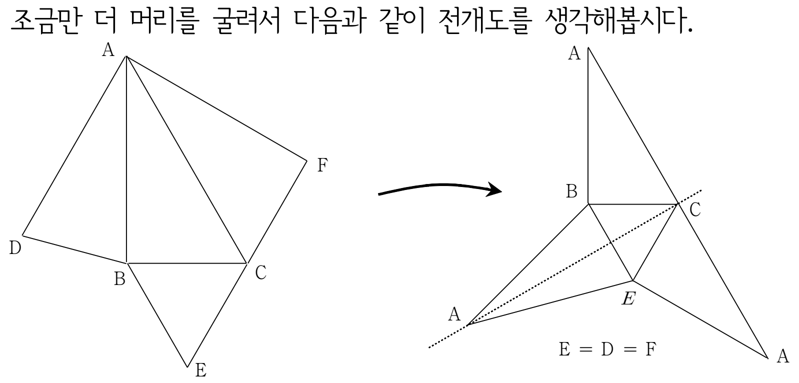
20. [새로운 유행?]

sol)

전개도 문제입니다. 하지만 이 문제도 역시 주어진 시험 시간 내에 충분히 생각해낼 수 있을 정도의 풀만한 상황을 물어볼 수 밖에 없겠죠?

> [2009년 08월 사관학교 수리(가형) 30번]
>
> 30. 구 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=27$과 그 내부를 포함하는 입체를 xy평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 남아있는 부분을 다시 yz평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 이때, 마지막에 남아있는 부분에서 두 평면에 의해 잘린 단면의 넓이는 $a\pi+b$이다. 두 자연수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

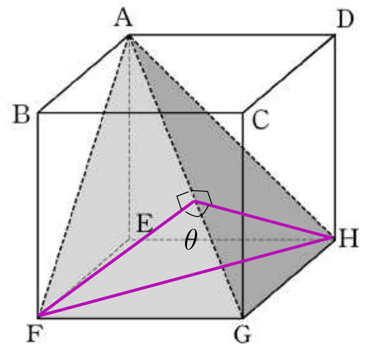
출제자의 수수께끼를 맞춰야 합니다. 지금도 위 기출문제처럼 문제 풀이의 열쇠가 되는 수학적인 그 무엇으로 두 면 ACF와 ABC를 합동인 채로 넣었네요. 하지만 문제에서 제시해준 그림대로라면 유추하기가 제법 힘드니까 조금만 더 머리를 굴려서 다음과 같이 전개도를 생각해봅시다.



이 상태에서 접어서 원래 사면체 모양을 만들면 두 면 ABC와 AEC가 합동임은 물론이거니와 두 면 ABE와 BEC가 이루는 둔각도 보이네요! 또, 이면각을 따지기 위해서는 두 면이 이루는 교선을 먼저 찾아야 하는데, 지금은 모서리 AC가 해당합니다. 그 다음에 할 작업으로는,

[2006년 11월 대수능 수리(가형) 06번]

6. 정육면체 ABCD−EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [3점]

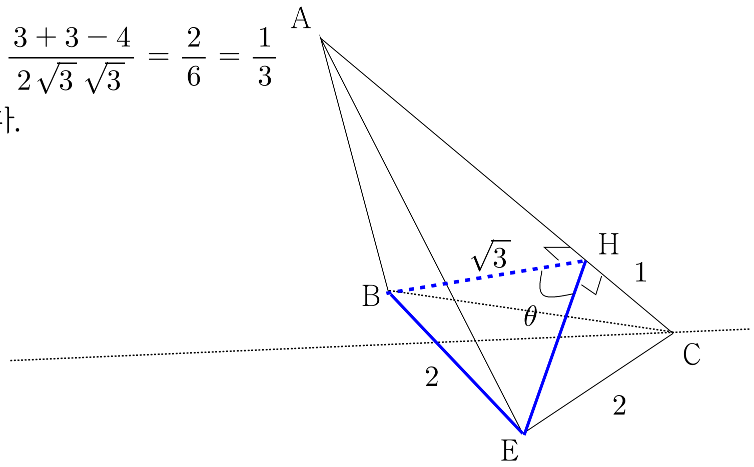


① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

위 기출문제 풀었을 때처럼 보조선 그어서 제이코사인법칙을 적용하면 됩니다. (여기까지 암산으로도 커버하는 학생도 있을 것 같네요.) 그러면 답은

$\cos\theta = \dfrac{3+3-4}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

이 됩니다.



※ 이 시험은 사관학교 문제 출제자 분들이 뚝딱 만들어낸 자작 모의고사라고 하기엔 의미가 남다릅니다. 6월 평가원과 9월 평가원 사이에 치르는 사관학교 문제들이 꽤 많이 수능을 적중 하였었습니다. 조금 전에 위에 들었던 문제도

[2006년 08월 사관학교 수리(가형) 16번]

16. 좌표공간 위의 두 점 A(0, 0, 1), B(1, 0, 0)이 있다. 점 P가 점 B에서 출발하여 xy평면 위의 직선 $x=1$을 따라 y축의 양의 방향으로 한없이 움직일 때, 선분 AP와 평면 $y-z=0$이 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 나타내는 자취의 길이는? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

같은 해 사관학교 시험에서 이미 똑같은 상황을 말하고 있었구요. 비단 공간도형 쪽이 아니더라도 다른 파트에서도 좋은 문제들이 많으니 눈 여겨 보시면 좋을 듯 합니다!

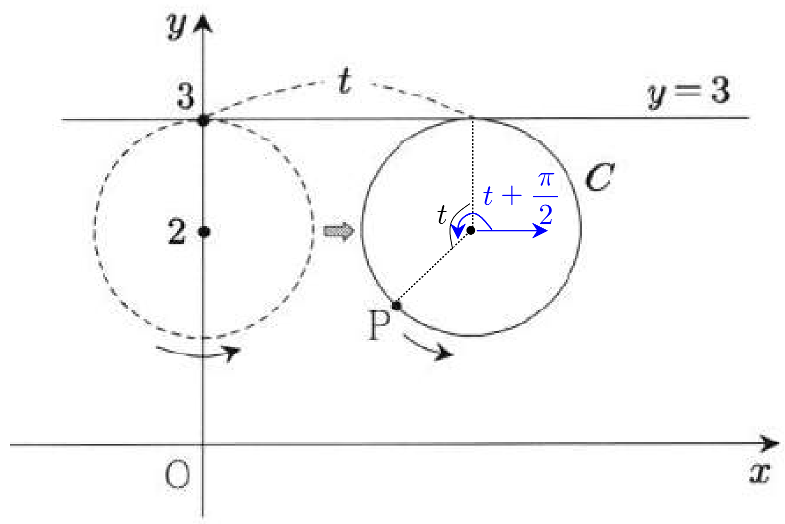
21. [이 상태에서 식 세울 수 있냐구요?]

sol)

사이클로이드 문제네요. 네, 사이클로이드 문제입니다. 여러분들은

[제1수준] 사이클로이드가 무엇인지 모름. 이게 뭐임?
[제2수준] 사이클로이드가 무엇인지 예전에는 알았으나 지금은 오래 되어서 잘 생각 안 남. 이런게 21번으로 나와서 뒤통수 맞은 기분임.
[제3수준] 사이클로이드가 무엇인지는 알겠으나 이런 응용 상황에 식을 어찌 세울지 몰라서 버릴지 고민함.
[제4수준] 내심 나오길 기대할 정도로 개념이 완벽하다 생각함. 이 상태로도 거뜬히 식 세울 수 있음.
[제5수준] 여러 풀이 중에서 더 빠른 풀이를 고려함.

중에서 어디에 속하시는지 모르겠지만, 제3~4수준의 분들에게 적합한 설명해보겠습니다. 이는 사실 유명한 수학교육이론인데 한번 흉내 내 본거라 저기서 말하는 수준은 임의로 제가 정한 겁니다.



사이클로이드, 에피사이클로이드, 하이포사이클로이드, 아스테로이드, 헬리코이드 등등 관련된 개념들이 많은데 이것들을 일일이 다 유도해보고 암기할 필요는 전혀 없습니다. 다만, 사설이나 실전 모의고사에서 괴롭히는 것을 커버하고자 한다면 본질을 꿰뚫을 원론적인 내용으로 한 번씩은 접근해볼 필요는 있죠. 주어진 상황을 매개변수로 나타내는 것이 관건인데, 우선 각도 관계를 찾아내야 합니다. 굴러간 직선 길이가 호의 길이와 일치하므로 중심각 t를 구한 다음(당연히 원의 반지름이 달랐다면 중심각도 변합니다.) 파란색으로 표시한 시초선을 잡아주고서 실제로 이루는 각도가 얼마인지를 봅니다. 이때 점 P의 x좌표는 굴러간 거리와 회전으로 인해 간 거리를 더해서 (이 부분이 제법 물리 선택자들이나 사이클로이드를 이미 알고 있는 사람들에게 유리하도록 작용합니다만) $x = 1\cdot t + \cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) = t - \sin t$를, y좌표는 굴러간 거리는 무시한 채 회전으로 인한 수치만을 고려한 $y = 2 + \sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 + \cos t$를 알 수 있습니다. 이는 단순하게 원 위의 한 점을 사인, 코사인으로 매개하여 나타내는 과정과 같게 됩니다. 그러면 이제 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{-\sin t}{1-\cos t}$에서 $t = \dfrac{2\pi}{3}$를 대입하면 답으로

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$ 을 이끌어 낼 수 있습니다.

이 작업도 실제로 해 보면 금방인데, 도저히 생각 안 난다면 $y = \frac{3}{2}$에 대칭시킨 기존의 사이클로이드 식 $(t-\sin t, 1-\cos t)$로부터 $\dfrac{dy}{dx}$에 $t = \dfrac{2\pi}{3}$를 대입하여 마이너스 부호를 곱한 걸로 구해도 됩니다. 사이클로이드 식은 외우고 있다는 전제하에 유효하겠죠.

※ 답은 구했다 쳐도, 매개변수가 정말 중요합니다. 요즘 트렌드라고 봐도 무방할 정도로, 역시 눈여겨 봐야할 부분입니다. 작년 6, 9월 평가원 문제에 내리 나온 것은 물론, 수능 29번에서도 매개변수를 통해 접근이 가능 했었죠. 이토록 매개변수 문제가 자주 등장하고 있는 데는 그만한 이유가 있습니다. 바로 바뀐 교육과정에서 강조하겠노라 하였고, 그 부분을 티를 내고 하고 싶어하는 것은 출제자분들의 당연한 심리이죠.

『2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 최종보고서』 중에서

미분과 적분은 자연현상이나 사회현상을 설명하기 위한 훌륭한 도구지만 그 자체를 너무 강조하여 학생들로 하여금 무미건조한 여러 가지 미분법이나 적분법을 학습하게 하는 것은 미분과 적분의 본질적인 성질은 놓치고 기술만 습득하게 할 우려가 있다. 실제로 현행 교육과정은 미분법만 해도 합의 미분법부터 로그함수의 미분법까지 열한가지 제목의 미분법을 쭉 이어서 학습하도록 하고 있는데 정작 매개변수 미분법이나 음함수 미분법을 평면 곡선의 성질을 살펴보기 위한 도구로서의 의미로 접근하는 것이 아니라 의미가 생략된 미분법 계산 그 자체에 치중하고 있는 실정이다. 이에 본 개정안에서는 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법 등 기하와 관련된 미분법은 '미적분 II'가 아니라 '기하와 벡터'에서 평면 기하와 관련하여 따로 다루도록 하였다.

22. [계산을 쉽게 하는 그 무엇]

sol)

$a_2+a_4=16 \rightarrow a_3=8$이자 $a_8+a_{12}=58 \rightarrow a_{10}=29$일 때
$a_{17}=29+21=50$이 답이 됩니다.

23. [쉬어가기]

$sol.1$) 열심히 완전 제곱 & 무연근 고려

$sol.2$) 그래프 그려서 찾기

$sol.3$) 개형 상상 후 $x=-3, 6 \rightarrow -3+6=3$

24. [간단한 미분]

sol)

(가) 조건에서 주어진 식을 양변 미분하여

$$x^2f'(x)=6x^3+3kx^2=x^2(6x+3k) \rightarrow f'(x)=6x+3k$$

를 얻고, f가 이차함수이며, (나) 조건을 가미하면 $k=-2$이고,

$$f(x)=3(x-1)^2+7$$

따라서, $f(10)=3\cdot 81+7=243+7=250$이 답이 됩니다.

25. [미적분 관계로부터 파생된 또 다른 함수]

sol)

$$f(x)=x^n\ln x \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=x^{n-1}(n\ln x+1)$$

이고, 최솟값은 $n\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\dfrac{1}{n} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{n}}$일 때 갖고,

$$g(n)=e^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{ne} \le -\frac{1}{6e}$$

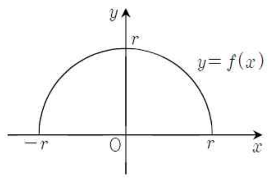
가 되어 만족하는 자연수 $n=1,2,3,4,5,6$으로 21이 답이 됩니다.

26. [확률밀도함수의 그래프 넓이]

sol)

[2006년 08월 사관학교 수리(가형) 09번]

9. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 반원의 호가 되도록 상수 r의 값을 정할 때, 확률 $P\left(X \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$의 값은? (단, $-r \le x \le r$이다.) [3점]



① $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ② $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ ③ $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$
④ $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ⑤ $1-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

[2007년 03월 교육청 수리(가형) 27번]

27. 두 연속확률변수 X, Y가 갖는 값의 범위는 각각 $0 \le X \le 4$, $0 \le Y \le 4$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$와 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=ax(x-4) \quad (0 \le x \le 4)$$

$$g(x)=\begin{cases} b & (0 \le x \le 2) \\ f(x-2)+b & (2 \le x \le 4) \end{cases}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $P(2 \le X \le 4)=\frac{1}{2}$
ㄴ. $b=\frac{1}{8}$
ㄷ. $P(1 \le Y \le 4)=\frac{5}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이것들 말고도 유사 문제들이 많겠지만 역시 사관학교 문제들은 사관학교 기출 내에서 돌고 돌기도 하고, 다른 시험들을 앞서가기도 합니다! 여러분들이 이미 기출문제라는 예방주사를 접종했노라 여기고 이 문제는 스윽 보고서 암산 능력을 극도로 끌어 올려서 한 번 풀어봅시다!

계단? 기와? 파도? 비슷한 전체 개형에서 이차함수 $f(x)$의 넓이가 $\frac{a}{3}$이므로 총 넓이는 $\frac{2a}{3}+a=\frac{5a}{3}=1$이 됩니다. 이때 구해야 하는 부분에서 이차함수가 잘려 있는데 합치면 결국 $\frac{a}{3}$이 되고 사각형 부분은 넓이가 a^2이 됩니다. 그러면 $\frac{a}{3}+a^2=\frac{1}{5}+\frac{9}{25}=\frac{14}{25} \rightarrow p+q=39$가 정답이 됩니다.

27. [탄젠트 덧셈정리 써야 하겠네!]

sol)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4} = \tan\alpha$$

$$g'(x) = -\frac{k}{x^2} \rightarrow g'(2) = -\frac{k}{4} = \tan\beta$$

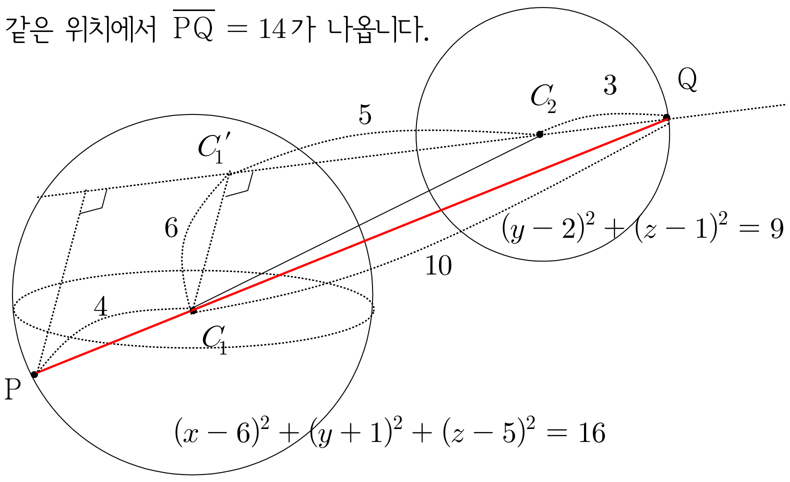
$$\tan\frac{\pi}{4} = |\tan(\alpha-\beta)| = \left| \frac{-\frac{1}{4}+\frac{k}{4}}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{k}{4}\right)} \right| = \frac{4(k-1)}{16+k} = 1$$

에서 $4k-4 = 16+k \rightarrow 3k = 20$이 정답이 됩니다. 문제에서 $k>1$이라고 초반에 제시했을 뿐더러 기하학적 해석으로 α, β의 대소 관계까지 파악하면 절댓값 벗기기가 수월합니다.

28. [신들린 포카칩]

$sol.1$) 있는 그대로

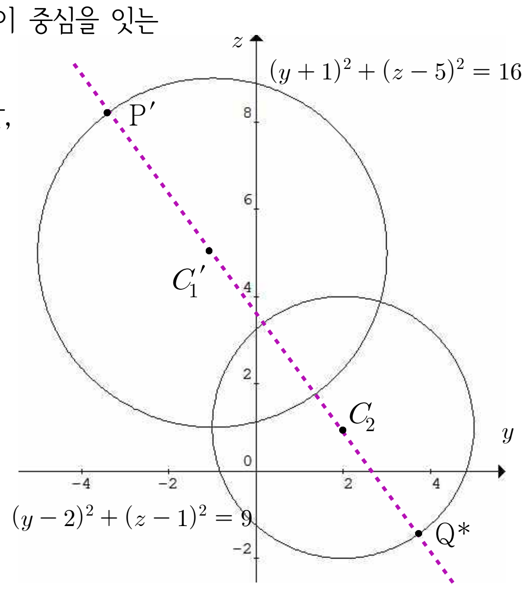
3차원 좌표 공간에서 구와 원의 위치관계를 파악하기 위해, 중심간 거리를 구해보면 $\sqrt{6^2+3^2+4^2} = \sqrt{61}$ 으로 $4+3 = 7 = \sqrt{49} < \sqrt{61}$ 이 되어 제법 떨어져 있는 모습이겠네요. 이에 착안하여 그려 해보겠습니다. 구의 중심 C_1을 yz평면에 내린 수선의 발을 C_1'라 하면 다음과 같은 위치에서 $\overline{PQ} = 14$가 나옵니다.



$sol.2$) 간단한 상황으로부터

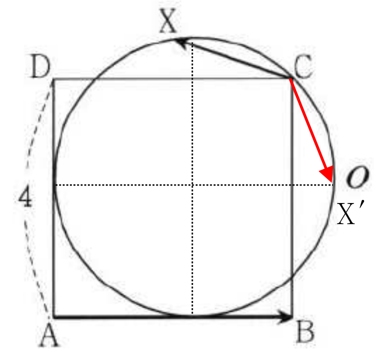
구를 마찬가지로 yz평면에 정사영 내리면 $(y+1)^2+(z-5)^2 = 16$이 되고, 이 상태에서 최댓값을 관찰한 후에 다시 x좌표를 부여하여 본 상황을 관찰해봅시다. 그러면 다음과 같이 중심을 잇는 직선 상에 두 점 P', Q^*가 위치할 때 최댓값임이 자명하지만, 다시금 구의 본디 모습을 생각해보면 직선 Q^*C_1과 구의 교점 중에 점 P^*를 택할 때 최댓값 14가 발생함을 알 수 있습니다.

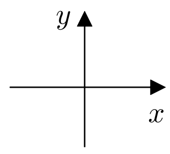
※ **포카칩님이 시험 일주일 전쯤에 공간도형과 회전이라는 자료를 온라인 상에 배포하였죠.**



29. [성분 분해하여 생각하기]

sol)





적당한 좌표계를 잡아보면 $\overrightarrow{AB} = (4,0)$인 반면 $\overrightarrow{CX} = (p,q)$로 내적하면 q값은 전혀 상관없게 됩니다. 따라서, X'의 위치에 올 때 $\overrightarrow{CX}$의 x축 방향 성분인 p가 최대가 됨으로서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}$도 최대입니다. 또, 원의 반지름은

$$\overline{AC} = r+\sqrt{2}r = 4\sqrt{2} \rightarrow r = 4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

를 통해 알 수 있고, 따라서

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX} \le 4\left(r-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 4r\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 16(\sqrt{2}-1)^2$$

$$= 16(3-2\sqrt{2}) = 48-32\sqrt{2}$$

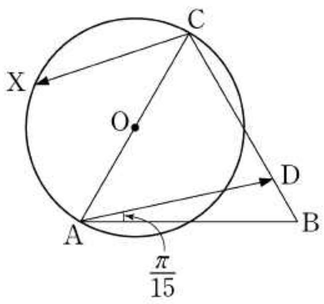
가 되어 $a-b = 48-(-32) = 80$이 답이 됩니다.

[2007년 08월 사관학교 수리(가형) 28번]

28. 좌표공간에서 구 $(x-12)^2+(y-5)^2+(z-10)^2=100$이 xy평면과 접하는 점을 A라 하고, 구 위를 움직이는 점을 P라 하자. 이 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최대값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

[2010년 11월 대수능 수리(가형) 22번]

22. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. [변곡 접선]

sol)

실전에서 마음이 급하니까 변곡점에서 그은 접선이 답일거라 생각하고 상황을 전개하여 구해도 맞출 수는 있습니다. 오로지 수식에만 의존한 채 말이죠.

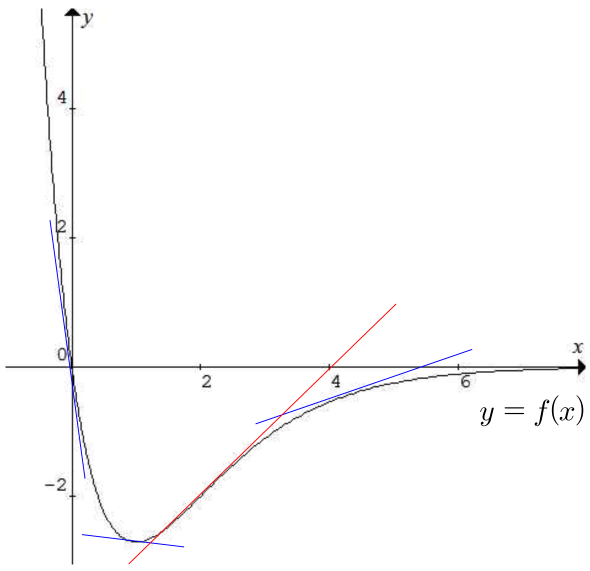
하지만 조금 더 수학적인 근거를 가지고 풀어보도록 하겠습니다. 우선 최대한 $f(x)$를 분석해보면, $f(x)=-xe^{2-x}$에서

$$f'(x)=-e^{2-x}+xe^{2-x}=(x-1)e^{2-x}$$
$$f''(x)=e^{2-x}+(1-x)e^{2-x}=(2-x)e^{2-x}$$

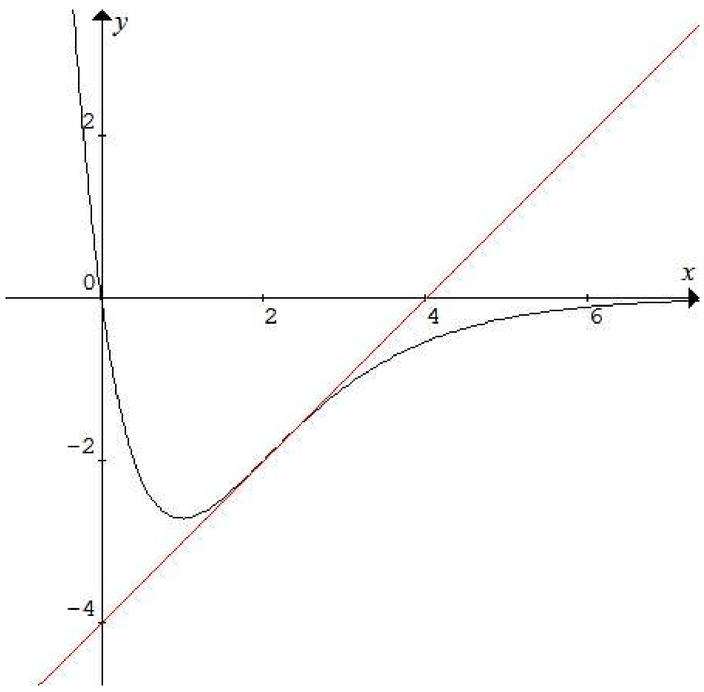
이므로 $x=1$에서 극솟값 $-e$를 갖고, $x=2$에서는 변곡점을 가지는 개형이고, 더불어

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$$

로부터 가로 점근선 $y=0$, 즉 x축을 가로 점근선으로 함을 알 수 있습니다. 이를 종합하여 개형을 그려보면



위와 같은 개형이고, (나) 조건을 만족하는 상황을 찾기 위해 각 점들에서의 접선을 그어가며 추이를 파악해보면 결국 변곡점에서 그은 접선 $g(x)=x-4$가 $f(x)$를 뚫으면서 접할 때가 유일하게 만족하게 됩니다.



그러면 다음 적분을 계산하여서(부분 적분도 있는데 계산해야 하네요.)

$$\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^2\{(-xe^{2-x})-(x-4)\}dx$$

$$=\left[(x+1)e^{2-x}\right]_0^2-\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_0^2=(3-e^2)-(2-8)=9-e^2$$

이 되어 답은 $k=9$가 됩니다.

※ 이렇듯 변곡 접선이라는 소재가 요즘 회자 되고 있습니다. 무언가 함수에 변화를 일으키는 지점으로 변곡점이 갖는 성질이 분명 매력적이기는 합니다만 그렇다고 일단 긋고 보자는 식으로 너무 맹신해서는 안 됩니다! 그럼 끝으로 적용이 되는 문제와 그렇지 않은 문제들을 소개하며 해설을 마치겠습니다.

[2014학년도 수능 대비 자유전자 모의평가 21번]

21. y축 위의 점 $\mathrm{P}(0,\ k)\ (k\ge1)$와 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)=\left|\dfrac{e\ln x}{x}\right|$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{Q}(t,\ f(t))$에 대하여 각 $\angle\mathrm{OPQ}$의 크기를 $g(t)$라고 하자. 함수 $g(t)$가 $t=1$에서만 극값을 갖도록 하는 k의 최솟값과 최댓값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\sqrt{e}$　② e　③ $2\sqrt{e}$　④ $e\sqrt{e}$　⑤ $2e\sqrt{e}$

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 30번]

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

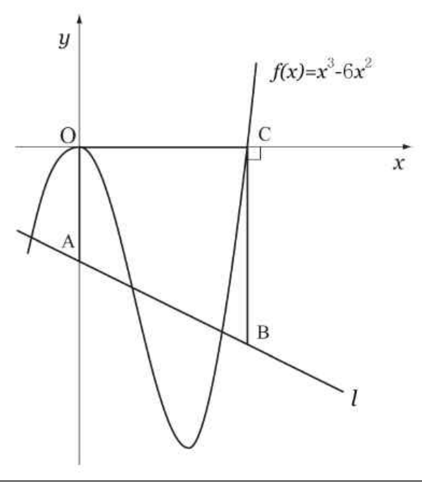
> (가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

이렇듯 킬러문제에 종종 나오니까 또, 수많은 시험들에서 확대 재생산 될 테니까 그때만큼은 확실히 도움 됩니다만, 늘 그런 것만도 아닙니다.

[2009년 07월 교육청 수리(가형) 23번]

23. 그림과 같이 임의로 그은 직선 l이 y축과 만나는 점을 A, 점 $\mathrm{C}(6,\ 0)$을 지나고 y축과 평행하게 그은 직선과의 교점을 B라 하자. 사다리꼴 OABC의 넓이가 곡선 $f(x)=x^3-6x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 임의의 직선 l은 항상 일정한 점 D를 지난다. 이 때, $\triangle\mathrm{ODC}$의 넓이를 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{AB}}$는 $\overline{\mathrm{OC}}$ 아래에 있다.) [4점]



[2012년 03월 교육청 수리(가형) 30번]

30. 함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0\le x\le2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t\mid p\le t\le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오. [4점]

포만한 수학 연구소