제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = 2^{-1}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2+6x+1$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 6, \quad a_4 + a_6 = 36$$

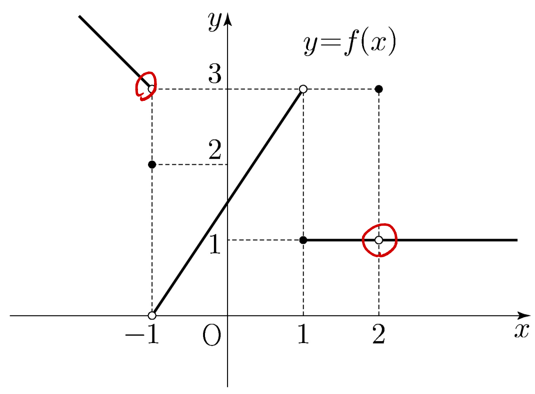
일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_5 = 18$

$\Rightarrow d=4, \quad a_{10} = 6+32$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



3　　1

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\ge 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \,/\, 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$

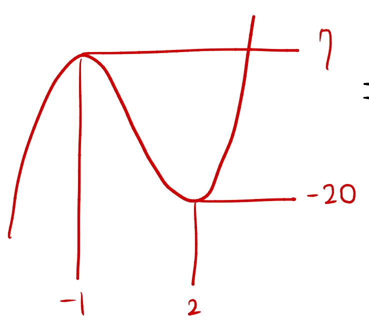
$\underbrace{1 \quad 2 \quad 4 \quad 8}_{\text{합}:15}$

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$f(x)=2x^3-3x^2-12x=-k$

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$



$\Rightarrow -20<-k<7$

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$t^2-t-6=0$

$(t-3)(t+2)=0$

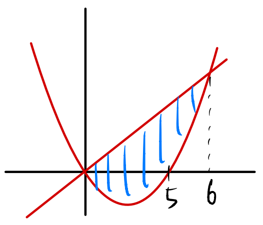
$\Rightarrow t=3 \Rightarrow s=3c$

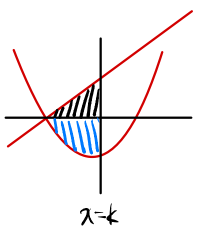
$9c^2+c^2=1, \quad c=\frac{-1}{\sqrt{10}} \Rightarrow s=\frac{-3}{\sqrt{10}}$

$\therefore s+c=-\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2}{5}\sqrt{10}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4





$S=\frac{1}{6}6^3=36$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}k^2\right)+\left(-\frac{1}{3}k^3+\frac{5}{2}k^2\right)=18$

$k^3-9k^2+54=0$

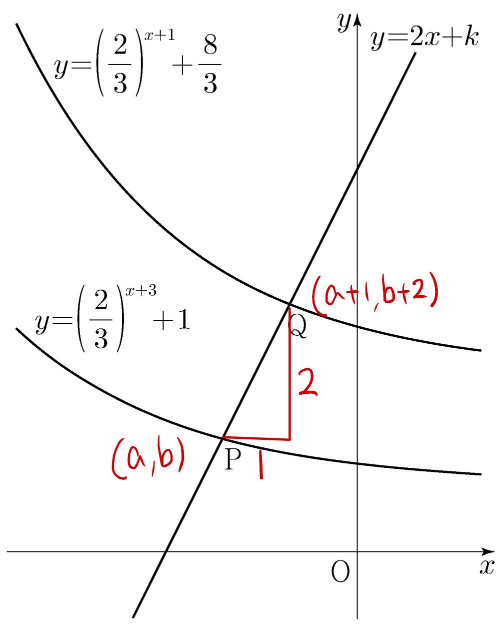
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -9 & 0 & 54 \\ & & 3 & -18 & -54 \\ \hline & 1 & -6 & -18 & \boxed{0} \end{array}$$

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ $\frac{35}{6}$



$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1=b$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}=b+2 \Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{5}{3}=2$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}=1,\ a=-2,\ b=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow -4+k=\frac{5}{3}$

$\therefore k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18　② -17　③ -16　④ -15　⑤ -14

$l : y=2x$

① $f'(0)=2$, ② $f(0)=0$

$(xf(x))'=f(x)+xf'(x)$

③ $f(1)=2$, $f(1)+f'(1)=2$

④ $f'(1)=0$

$\Rightarrow f(x)=ax^3+bx^2+2x$ (①,② 사용)

$\begin{cases} a+b+2=2 \\ 3a+2b+2=0 \end{cases}$ (②,③ 사용)

$\Downarrow$

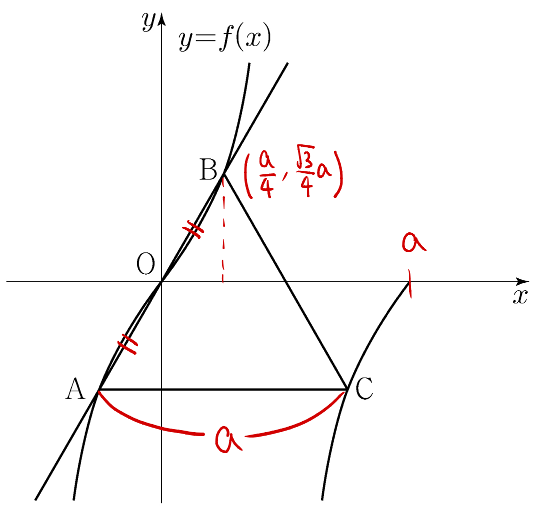
$a=-2,\ b=2$

$\therefore f'(x)=-6x^2+4x+2,\ f'(2)=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

$\Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

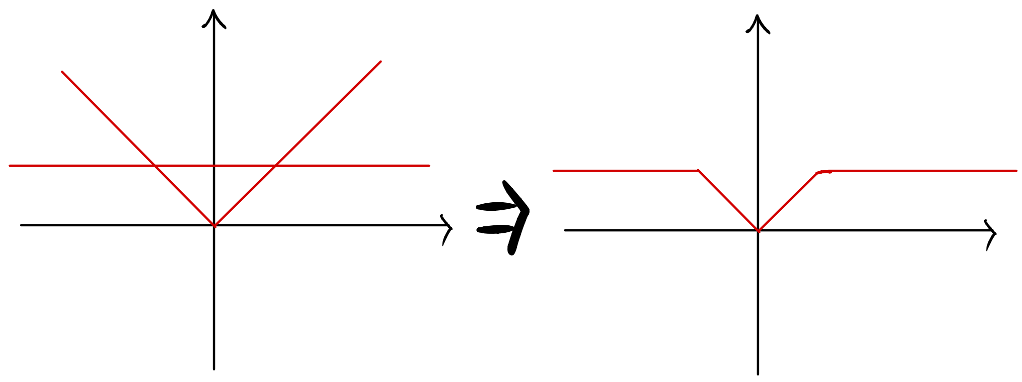
$1 \quad 0 \quad \frac{1}{2}$

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$

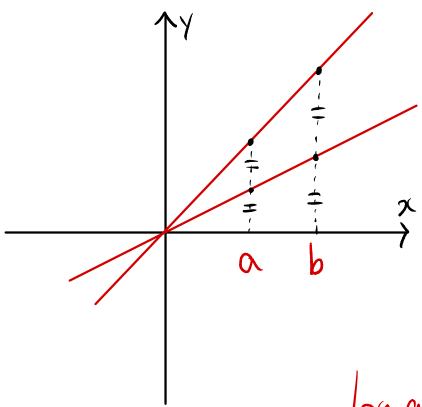
$[\{f(x)\}^2-x^2]\{f(x)-1\}=0$

$\Rightarrow f(x)=|x|$ or $f(x)=1$



13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920



$$\begin{cases} \log_4 a = \frac{1}{2}\log_2 a \\ \log_4 b = \frac{1}{2}\log_2 b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 a}{a} = \frac{\log_2 b}{b}$$

$$\Rightarrow a^b = b^a = \frac{f(1)}{2} = 20$$

$$\therefore f(2) = a^{2b} + b^{2a} = 800$$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b) \quad (a \neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt = 0$ O

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다. X

ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다. O

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

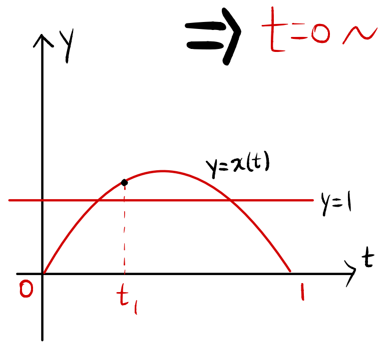
ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt = (t=0 \sim t=1$ 변위$) = 0$

$\therefore x(1) = x(0) = 0$

ㄴ. $\int_0^1 |v(t)|dt = (t=0 \sim t=1$ 이동거리$) = 2$

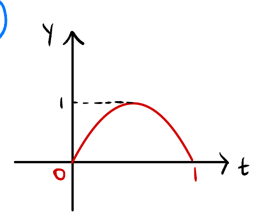
if $x(t_1)>1$인 t_1이 존재하면

$\Rightarrow$ $t=0 \sim t=1$ 이동거리 최솟값은 $2x(t_1) > 2$ (모순)



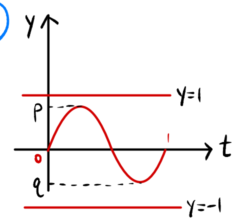
ㄷ. $\int_0^1 |v(t)|dt = 2$ 이기 위한 경우는 크게 두가지

①



$\int_0^1 |v(t)|dt = 1+1 = 2$

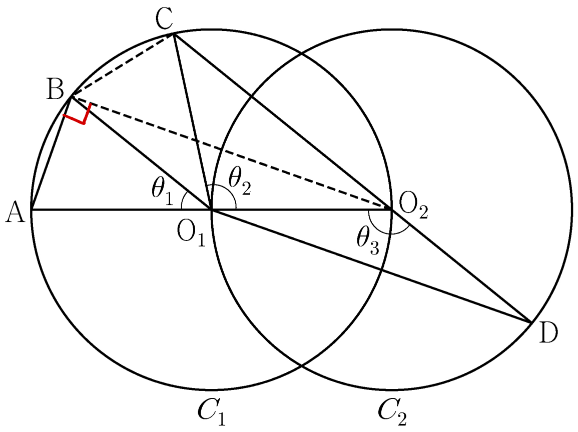
②



$\int_0^1 |v(t)|dt = |p|+|p-q|+|q| = 2$

$\Rightarrow$ 이 중 ②에 대한 설명이므로 참

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때 (피타) $\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=3k$
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서 (정의) $\dfrac{2\sqrt{2}k}{3k}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

$3k$ $\frac{7}{3}k$

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

(다): $\triangle O_2BC$에서

$k^2=8k^2+x^2-2\cdot 2\sqrt{2}k\cdot x\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$3x^2-16kx+21k^2=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{3}k$ $(\overline{O_2C}<\overline{O_2B}=2\sqrt{2}k)$

3 / 1, -7 / -3

$f(p)\times g(p)=7p^2=\dfrac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120-\dfrac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 120-\log_2 15=\log_2 8$

$\boxed{3}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^3+x^2+2$

$\therefore f(1)=1+1+2=4$

$\boxed{4}$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$2\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{\cancel{2}} = \overset{112}{\cancel{56}}, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

두 식을 빼면

$a_8 = 12$

$\boxed{12}$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$

$D/4 = a^2 + 3a^2 - 24a \le 0$

$\Rightarrow 0 \le a \le 6$

$\boxed{6}$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$(0 \le x \le 1)$ $f(x+1) = x^2 + ax + b$

(미분가능) $\Rightarrow$ $f(1) = b = 1$, $f'(1) = a = 1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

$\therefore 60\int_1^2 f(x)dx = 60\int_0^1 f(x+1)dx = 60\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1$

$= 60 \times \frac{11}{6} = 110$

$\boxed{110}$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.
>
> (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점]

2 4 8 16 . . . 1024
-2 -4 -8 -16 -1024

" $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n-1) = 2^{n+1}-2$ "를 생각해보면

$\sum_{n=1}^{9} 2^n = 2^{10}-2$ $\quad -2^{10}$

$\sum_{n=1}^{10} a_n$이 $\boxed{(2+4+8+\cdots+512)}+\boxed{(-1024)}$의 형태에서

크게 다르지 않은 것임을 짐작 가능

($\because$ -14는 절댓값이 그렇게 크지 않으므로)

따라서 앞의 숫자 2와 4만

-2와 -4로 바꾸어 보면

$\{(-2)+(-4)+8+16+\cdots+512\}+(-1024)=-14$ 성립

$\Rightarrow -2, -4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, -1024$
$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad a_9$

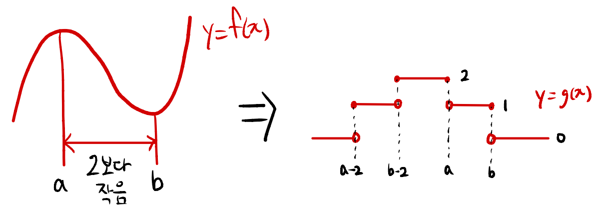
$(-2)+(8)+32+128+512=678$

$\boxed{678}$

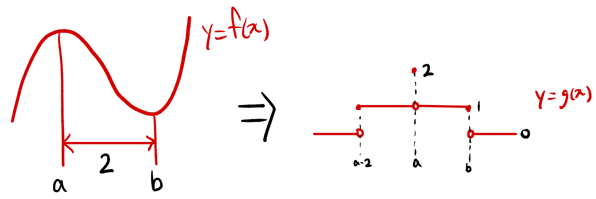
22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

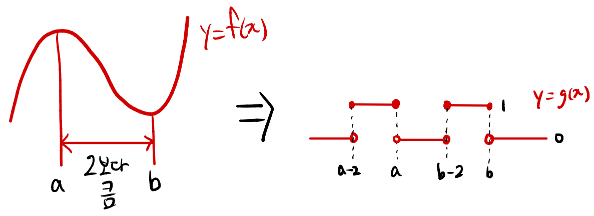
$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

①


⇒ (가) 위배 (X)

②


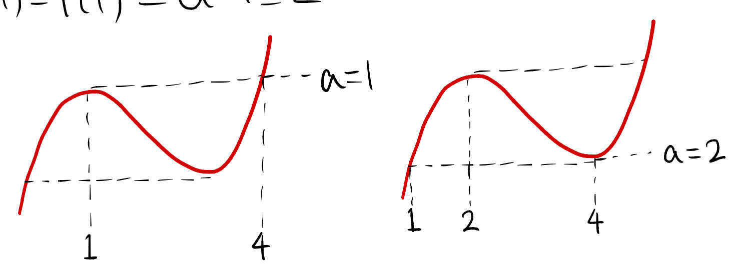
⇒ (가) 만족 (O)

③


⇒ (가) 만족 (X)
⇓
but (나)에서 $g(x)=2$인 x값이 존재해야 하므로 모순

(나)에서

$f(1)=f(4)=a$이므로



$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+a$ $\qquad$ $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)^2+a$

위의 경우 중 하나 ⇒ 오른쪽 경우라면 $g(f(0))=g(a-8)=0$이므로 모순

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$, $f(5)=9$

$\boxed{9}$

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.