자이고사 2회

수학 영역 (나 형) 해설

1. $\frac{1}{2}\times 8=4$. ②

2. n^3의 계수 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. ①

3. $a\neq a+1$이므로 $a=2,\ b=a+1=3$. ⑤

4. $f(g(4))=f(1)=3$. ③

5. $\lim_{x\to 0-}f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=3$. ④

6. **풀이 1** : $14=10+2+2=8+4+2=6+6+2$ $=6+4+4$.
   풀이 2 : 7을 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $7=5+1+1=4+2+1$ $=3+3+1=3+2+2$. ④

7. $p: 2\leq x\leq 9$이므로 a로 가능한 값은 $2, 3, 4$. ③

8. 최댓값을 가질 때는 $x=2$일 때이므로 $f(2)$ $=-\sqrt{14-5}+a=-3+a=-a$에서 $a=\frac{3}{2}$. ①

9. $\mathrm{P}(A)=4\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\frac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$. ②

10. 강아지를 희망하는 학생은 200명, 강아지와 새 모두를 희망하는 학생은 150명이므로 $\frac{3}{4}$. ⑤

새 →

11. 속도 $v(t)=4t^3-12t^2+12t$,
    가속도 $a(t)=12t^2-24t+12=12(t-1)^2$
    따라서 상수 $a=1$. ①

12. $f(x)$가 $x=k$에서 연속이므로 $k-2=\frac{2}{k-1}$, $k^2-3k=0$에서 $k=0$ 또는 $k=3$인데, $k=0$인 경우 $x=1$에서 $f(x)$가 불연속이 되므로 $k=3$이다. ⑤

13. $f'(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이고 근이 $-1, 0, \frac{1}{4}$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.
    $f'(x)=4x^3+3x^2-x,\ f(x)=x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+C$,
    $f(0)=C=1,\ f(2)=16+8-2+1=23$. ③

14. $\mathrm{E}(\hat{p})=\frac{4}{13},\ \sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{\frac{4}{13}\times\frac{9}{13}}{9}}=\frac{2}{13}$이므로
    $4\mathrm{E}(\hat{p})+5+5\sigma(\hat{p})=\frac{16}{13}+5+\frac{10}{13}=7$. ④

15. $b=a^{\frac{8}{3}}$을 대입하면 $\log_a 8=\log_4 a^{\frac{8}{3}}$,
    $3\log_a 2=\frac{4}{3}\log_2 a$이고 $\log_a 2=\frac{1}{\log_2 a}$임을 이용하면 $(\log_2 a)^2=\frac{9}{4}$, $a>1$이므로 $\log_2 a=\frac{3}{2}$,
    $a=2^{\frac{3}{2}}$. ③

16. $\log_2 a_1=\log_2 12=2+b$에서 $b=\log_2 3$이므로 $a_n=2^{2n+\log_2 3}=3\times 4^n$이다. 등비수열의 합 공식을 이용하면 $\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{12(4^5-1)}{4-1}=4(4^5-1)$ $=2^{12}-2^2$. ③

* 처음에 $a_n=2^{2n+b}=4^n\times$★꼴이라는 것에서 공비가 4이고 초항이 12인 등비수열이라는 것으로 바로 넘어갈 수도 있다.

17. $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_8\mathrm{C}_4 = 70$이다. 한편 주어진 식은 $f(1)+1 < f(2)$, $f(2)+1 < f(3)$, $f(3)+1 = f(4)$로 변형할 수 있다.

풀이 1 : 그냥 세기

$(f(1), f(2), f(3), f(4))$의 순서쌍으로 가능한 것은
$(1,3,5,6)$, $(1,3,6,7)$, $(1,4,6,7)$, $(2,4,6,7)$,
$(1,3,7,8)$, $(1,4,7,8)$, $(1,5,7,8)$, $(2,4,7,8)$,
$(2,5,7,8)$, $(3,5,7,8)$로 10가지.

풀이 2 : $f(3)+1 = f(4)$에서 $f(3)$을 정하면 $f(4)$는 자동으로 정해지며, $f(3)$은 최대 7이다. 한편 $f(1), f(2), f(3)$은 서로 2 이상 차이가 나야 하는데, 이는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에서 서로 이웃하지 않은 숫자 세 개를 고르는 것과 같고, 이는 ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$가지이다. 확률은 $\dfrac{10}{70} = \dfrac{1}{7}$. ④

18. (가) : 한 가로선 위에서 꼭짓점 2개를 고르는 경우의 수와 같으므로 $f(n) = {}_n\mathrm{C}_2$.

(나) : 가로 k칸, 세로 1칸인 도로망의 최단 경로의 개수이므로 $g(k) = {}_{k+1}\mathrm{C}_1 = k+1$.

(다) : 과정의 (1), (2), (3)의 경우의 수를 합하면 되므로 $h(n) = n + 2 \times {}_n\mathrm{C}_2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)(k+1)$.

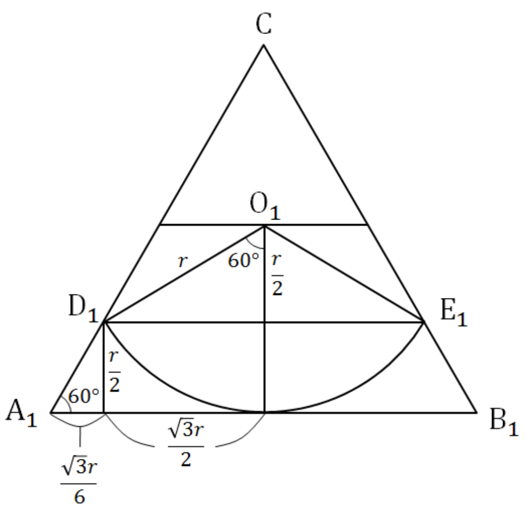
$f(4) = 6$, $g(5) = 6$이고

$h(6) = 6 + 2 \times 15 + \displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2(-k^2 + 5k + 6)$

$= 36 + 2(-55 + 5 \times 15 + 30) = 136$,

$f(4) + g(5) + h(6) = 148$. ②

19. 그림과 같이 반지름을 r로 두고 선을 긋는다.



한 변의 길이가 2이므로 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)r = 1$에서 $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고, 삼각형의 높이가 $\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{CO_1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 공비를 구할 수 있다. 길이 비가 $2:1$이므로 넓이 비는 $4:1$.

한편 첫 항은
(삼각형 $\mathrm{CA_1B_1}$) − (부채꼴) − (사각형 $\mathrm{CD_1O_1E_1}$)
의 넓이와 같다.

(삼각형 $\mathrm{CA_1B_1}$의 넓이) = $\sqrt{3}$

(부채꼴의 넓이) $= \dfrac{1}{3} \times \pi \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$

(사각형 $\mathrm{CD_1O_1E_1}$의 넓이)

= (삼각형 $\mathrm{CD_1E_1}$) − (삼각형 $\mathrm{O_1D_1E_1}$)

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

따라서 초항은 $\dfrac{5\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{4}$이고,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\dfrac{5\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{4}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3}.$$ ⑤

20. 주어진 식에 $x = 0$을 대입하면 (분모 → 0)이므로 (분자 → 0)이어야 한다. 따라서 $f(0) = 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\{f(x)\}^2 - x^2}{xf(x)} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x} - \frac{x}{f(x)}\right\}$이고

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$으로 수렴하므로

$f'(0) - \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{3}{2}$, $2\{f'(0)\}^2 - 3f'(0) - 2 = 0$에서

$f'(0) = 2$ 또는 $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$이다.

$f(x)$의 근이 $0, 2, \alpha$이므로 $f(x) = x(x-2)(x-\alpha)$,
$f'(x) = (x-2)(x-\alpha) + x(x-\alpha) + x(x-2)$에서
$f'(0) = 2\alpha < 0$이므로 $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

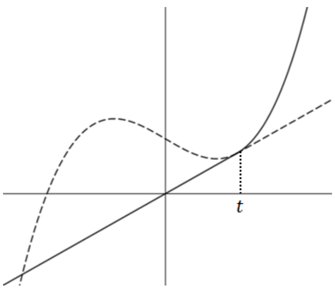
$f(x) = x(x-2)\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$, $f(4) = 4 \times 2 \times \dfrac{17}{4} = 34$. ②

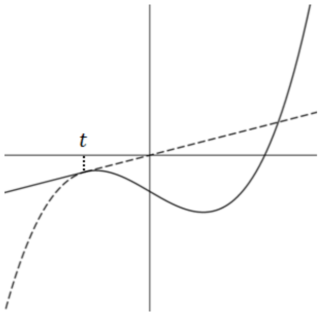
21. ㄱ. 구간이 나뉜 함수가 미분가능하므로 먼저 $x=t$를 양쪽에 대입한 뒤 미분하고 $x=t$를 양쪽에 대입합니다.

$at=t^3-3t+b$, $f'(x)=\begin{cases} a & (x<t) \\ 3x^2-3 & (x \ge t) \end{cases}$ 이므로

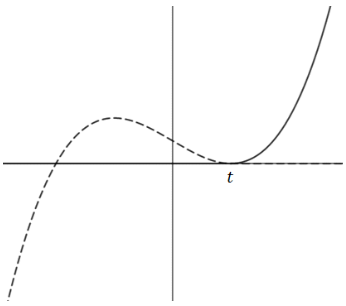
$a=3t^2-3$에서 $b=2t^3$. (거짓)

ㄴ. 위에서 $f(x)$는 $x<t$일 때 원점을 지나는 직선, $x \ge t$일 때 $y=x^3-3x$를 y축 방향으로 평행이동한 곡선이라고 이해할 수 있습니다. t를 임의로 잡아 예시를 몇 개 들어보면 다음과 같습니다.





이를 통해 판단해보면 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖기 위해서는 t가 다음 그림의 경우보다 작아야 한다는 것을 알 수 있습니다.



함수 $y=x^3-3x$가 극소가 되는 곳은 $3x^2-3=0$에서 $x=1$이므로, $t \le 1$입니다. (참)

* 참고 : 상수함수는 모든 점에서 극대이자 극소인 것으로 보기 때문에, 문제에서도 $t<1$이 아닌 $t \le 1$이라고 제시했습니다.

ㄷ. 적분값이 0이 되는 모든 t에 대해 $(3t^2-3)$의 합을 물어보고 있습니다. 우선 위끝과 아래끝이 같은 경우$(t=0)$가 있고, 이때 $a=-3$입니다.

다음은 t가 양수일 때, t가 음수일 때로 나누어 보겠습니다.

1) t가 양수일 때 : $x<t$에서 $f(x)$는 원점을 지나는 직선이므로, $\int_0^t f(x)dx=0$이 되려면 직선의 기울기가 0이어야 합니다. 이와 같은 경우는 'ㄴ.'에서 나온 상황밖에 없으므로 $t=1$이고, $a=0$입니다.

2) t가 음수일 때 : $x \ge t$에서 $f(x)=x^3-3x+2t^3$이므로, $\int_0^t (x^3-3x+2t^3)dx=0$입니다. 식을 적분하면 $\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2t^3x\right]_0^t=\frac{9}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2=0$이고,

$t^2=0$ 또는 $t^2=\frac{2}{3}$에서 $t<0$이므로 $t=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $a=-1$입니다.

가능한 모든 a의 값의 합은 $(-3)+0+(-1)=-4$ (참) 답 ④

22. ${}_{4+3-1}C_3=20$.

23. $f'(x)=3x^2-4x$, $f'(3)=27-12=15$.

24. ${}_6C_4 \times x^4 \times (-3)^2$에서 계수는 $15 \times 9=135$.

25. $P(X \le 4)=P(X \ge 8)$에서 m은 4와 8의 중간인 6. $P(X \ge 8)=P\left(Z \ge \frac{8-6}{\sigma}\right)$에서 $\frac{2}{\sigma}=0.5$, $\sigma=4$. $m+\sigma=6+4=10$.

26. a와 b에 1에서 6까지를 차례대로 넣어보면 $|a-3|=2,1,0,1,2,3$, $|b-7|=6,5,4,3,2,1$이 나온다. $|a-3|>|b-7|$인 경우는 다음과 같이 2가지로 나눌 수 있다.

1) $|a-3|=2$, $|b-7|=1$인 경우 :
$|a-3|=2$인 경우 2가지, $|b-7|=1$인 경우 1가지

2) $|a-3|=3$, $|b-7| \le 2$인 경우 :
$|a-3|=3$인 경우 1가지, $|b-7| \le 2$인 경우 2가지

따라서 전체 경우의 수는 $2 \times 1+1 \times 2=4$.

27. $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로 $S_n=1-\frac{1}{n+1}$이다.

$\sum_{k=1}^{\infty}a_kS_{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\times\left(1-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\times\frac{k+1}{k+2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$p+q=4+3=7$.

28. 집합 A에는 4, 6, 8이 포함될 수도, 안 될 수도 있으므로 집합 $B-A$에는 k 이하의 짝수 중 4, 6, 8은 제외될 수도, 안 될 수도 있다. 쉽게 알 수 있도록 괄호로 표시하면 다음과 같다.

$B-A=\{2, (4), (6), (8), 10, 12, \cdots\}$

1) $B-A$의 최댓값이 8인 경우 :
2, 4, 6, 8을 모두 더해도 24가 안 되기 때문에 불가능하다.

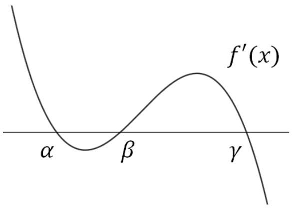
2) $B-A$의 최댓값이 10인 경우 :
모든 원소의 합이 24이려면 $B-A=\{2,4,8,10\}$이어야 한다. 이때 $A\cap B=\{6\}$이다.

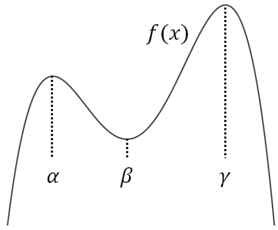
3) $B-A$의 최댓값이 12인 경우 :
모든 원소의 합이 24이려면 $B-A=\{2,10,12\}$이어야 한다. 이때 $A\cap B=\{4,6,8\}$이다.

$B-A$의 최댓값이 14 이상이면 모든 원소의 합은 항상 24보다 크다. 따라서 2), 3)으로부터 가능한 모든 a의 값의 합은 $6+18=24$.

29. 삼차함수 $f'(x)=0$의 세 근이 α,β,γ인데, $f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$으로부터 $\alpha<x<\beta$일 때 $f'(x)<0$이라는 것을 알 수 있다. 이때 $\beta<x<\gamma$일 때 $f'(x)>0$, $x>\gamma$일 때 $f'(x)<0$이므로 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 음수라는 것을 알 수 있다.

한편 $f'\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)>0$으로부터 $\beta<\frac{\alpha+\gamma}{2}<\gamma$여야 하므로, β는 α와 γ의 평균보다 작다. 즉 β와 α의 차가 γ와 β의 차보다 작다. 조건들을 바탕으로 $f'(x)$와 $f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.





한편 $y=f(x)$와 $y=k$가 접할 때는 $f'(x)=0$일 때이다. k로 가능한 값이 $2,4,7$이라는 것으로부터 $f(\alpha),f(\beta),f(\gamma)$가 각각 $2,4,7$ 중 하나라는 것을 알 수 있고, 그래프를 통해 판단하면 $f(\alpha)=4,\ f(\beta)=2,\ f(\gamma)=7$이다.

$\int_{\alpha}^{\beta}f'(x)dx+3f(\gamma)=f(\beta)-f(\alpha)+3f(\gamma)$
$=2-4+21=19$.

30. 먼저 수열 $\{a_n\}$을 찾아야 합니다.

1) 하나씩 해보며 규칙 찾기 :
점 A_1은 원점으로부터 경로를 따라 4만큼 이동한 위치에 있습니다. 그런데 A_1은 원점으로부터 x축 방향으로 a_1, y축 방향으로 $\frac{1}{2}(a_1)^2$ 떨어져 있으므로 $a_1+\frac{1}{2}(a_1)^2=4$에서 $a_1=2$.

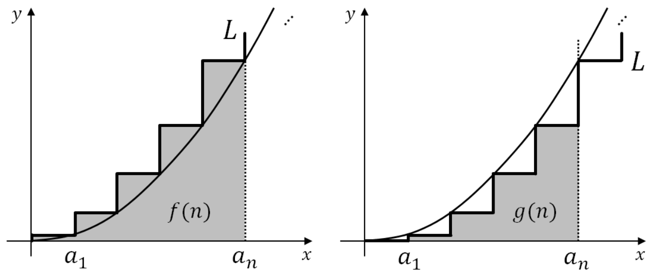
점 A_2는 $\mathrm{A}_1(2,2)$에서 경로를 따라 8만큼 이동한 위치에 있습니다. A_2는 A_1으로부터 x축 방향으로 (a_2-2), y축 방향으로 $\left\{\frac{1}{2}(a_2)^2-2\right\}$ 떨어져 있으므로 $(a_2-2)+\left\{\frac{1}{2}(a_2)^2-2\right\}=8$에서 $a_2=4$.

같은 방법으로 A_3도 해보면 $a_3=6$이고, 이후 $a_n=2n$이라고 추측할 수 있습니다. a_2까지 해보고 $a_n=2^n$이라고 하셨다면 안타까울 따름

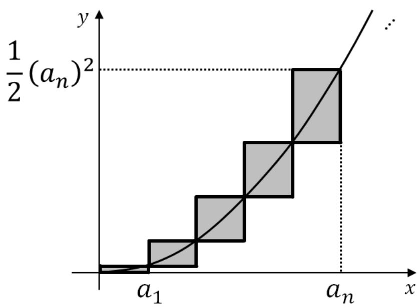
2) 일반항 알아내기 :
위에서 점 A_2는 A_1에서 8만큼 이동했다고 할 수

도 있지만, 원점에서 $4+8=12$만큼 이동했다고 할 수도 있습니다. 이 방식을 이용하면 점 A_n은 원점에서 $4+8+\cdots+4n=4(1+2+\cdots+n)$ $=2n(n+1)$만큼 이동한 위치에 있습니다. 따라서 식을 세워보면 $a_n+\frac{1}{2}(a_n)^2=2n(n+1)$, 인수분해를 하면 $a_n=2n$.

다음은 $f(n)$과 $g(n)$을 그림으로 파악해 봅시다. 경로 L은 점 $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$을 모두 지나면서 x축과 y축에 평행한 선분으로만 이루어져 있으므로, 넓이가 최대 / 최소일 때는 다음과 같습니다.



따라서 $f(n)-g(n)$은 다음과 같이 직사각형들의 합으로 나타납니다.

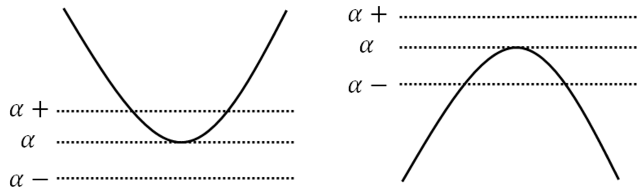


직사각형의 가로 길이는 모두 2로 같으므로, 전체 넓이는 $2\times\frac{1}{2}(a_n)^2=4n^2$입니다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{(a_n)^2}=\frac{4n^2}{(2n)^2}=1.$$

31. 집합 A의 원소 α에 대하여 $g(\alpha+)<g(\alpha-)$입니다.(우극한과 좌극한을 간단히 $\alpha+, \alpha-$라고 썼습니다.)

이를 $g(x)$의 정의에 따라 해석하면 '$y=f(x)$와 $y=\alpha+$의 교점의 개수보다 $y=f(x)$와 $y=\alpha-$의 교점의 개수가 많다'고 할 수 있습니다.

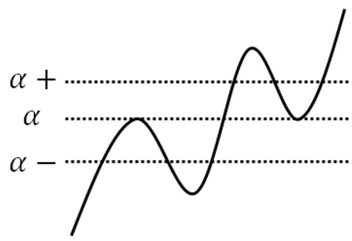


$y=\alpha+$와의 교점 개수보다 $y=\alpha-$와의 교점 개수가 많은 경우는 그림에서 오른쪽 경우와 같습니다. 따라서 $f(x)$가 극댓값 α를 갖는 경우 α가 집합 A의 원소가 될 수 있습니다.

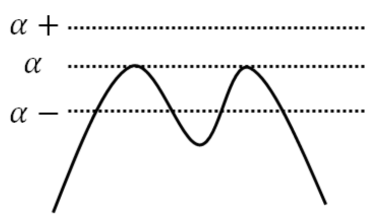
문제에서 $n(A)=10$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 최소 10개입니다. 따라서 $f(x)$가 극대가 되는 점도 최소 10개입니다.

최고차항의 계수가 양수인 다항함수의 경우, 극대가 되는 점이 1개면 최소 3차함수, 극대가 되는 점이 2개면 최소 5차함수 등이 됩니다. 따라서 극대가 되는 점이 10개면 $f(x)$의 차수는 최소 21입니다. 답 21.

* $f(x)$가 극댓값이 최소 10개라고 한 이유는 다음과 같이 극댓값을 가지면서도 $y=\alpha+$와의 교점 개수가 $y=\alpha-$와의 교점 개수와 같을 수 있기 때문입니다.



또한 극댓값이 10개일 때 극대가 되는 점은 10개보다 많을 수도 있습니다. 다음과 같이 같은 극댓값을 가지면 됩니다.



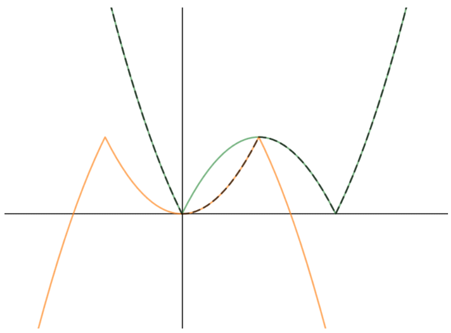
$f(x)$의 차수가 최소가 되려면 이러한 경우가 없어야 합니다.

32. $p(x)$는 $x(x-2)$를 꺾어올린 함수, $q(x)$는 $-|(x-1)(x+1)|$을 t만큼 올린 함수로 $(-1, t)$, $(1, t)$를 지납니다.

$f(x)$는 처음에는 $p(x)$를 따라가다가, $p(x)$와 $q(x)$의 교점을 만나면 한 함수에서 다른 함수로 바뀝니다. $p(x)$를 초록색, $q(x)$를 주황색, $f(x)$를 점선으로 표시해 그리겠습니다.

구하는 값이 $g(1)+g\left(\dfrac{3}{2}\right)+g(2)+g\left(\dfrac{5}{2}\right)+g(3)$이므로, 우선 t에 1을 대입해 그립니다.

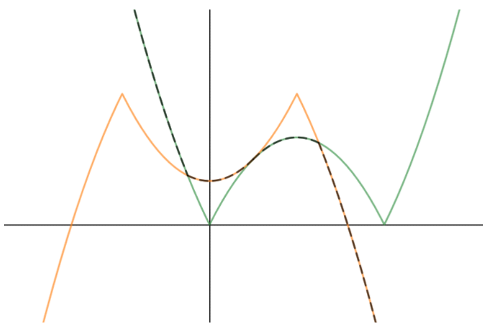
1) $t=1$일 때



$g(1)=3.$

2) $t=\dfrac{3}{2}$일 때

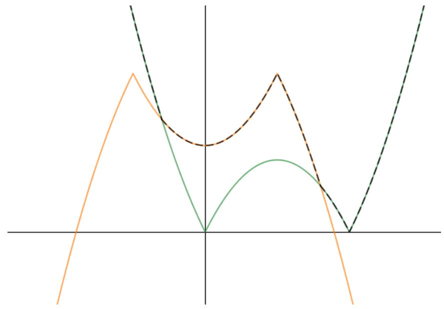
$q(x)$가 얼마나 위로 올라가는지가 관건입니다. 두 함수 $p(x)$와 $q(x)$가 점대칭이므로, $p\left(\dfrac{1}{2}\right)$과 $q\left(\dfrac{1}{2}\right)$만 비교하면 $0<t<1$ 부분에서 $p(x)$와 $q(x)$가 만나는 양상을 알 수 있습니다. $t=\dfrac{3}{2}$일 때 $p\left(\dfrac{1}{2}\right)=q\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$이므로, 두 함수는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 접합니다.



$g\left(\dfrac{3}{2}\right)=2.$

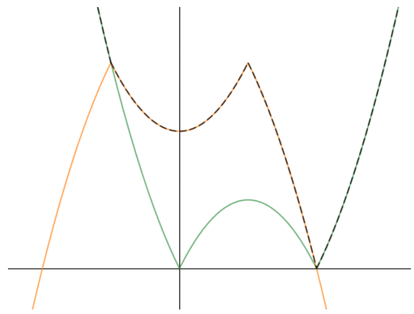
3) $t>\dfrac{3}{2}$일 때

이제는 $q(x)$의 첨점과 $p(x)$가 언제 만나느냐가 관건입니다. $p(-1)=3$이므로 $t=3$일 때 $p(x)$가 $q(x)$의 첨점을 지나며, 동시에 $q(x)$가 $p(x)$의 첨점을 지납니다.



$t=2$, $t=\dfrac{5}{2}$일 때 위 그림과 같으므로

$g(2)=g\left(\dfrac{5}{2}\right)=4.$



$t=3$일 때 위 그림과 같으므로
$g(3)=3.$

$$\sum_{k=2}^{6} g\left(\frac{k}{2}\right)=3+2+4+4+3=16.$$