고지우의

난문현답

사관 기출

'미적분 I'

1. 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1사분면에 있는 두 점 $(2,\ a)$, $(4,\ a+8)$을 지난다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+\frac{8k}{n}\right)=50$$

을 만족시키는 상수 a의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x t^2 f'(t)dt=\frac{3}{2}x^4+kx^3$이다.
(나) $x=1$에서 극솟값 7을 갖는다.

$f(10)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

[54~55] 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\int_0^n f(x)dx,\ b_n=\int_{n-1}^n g(x)dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

다음 두 물음에 답하여라.

3. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=f(x)+1$일 때, a_3+b_4의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

4. $f(x)=g(x)$이고 $b_n=2n+3$일 때, a_{10}의 값은? [3점]

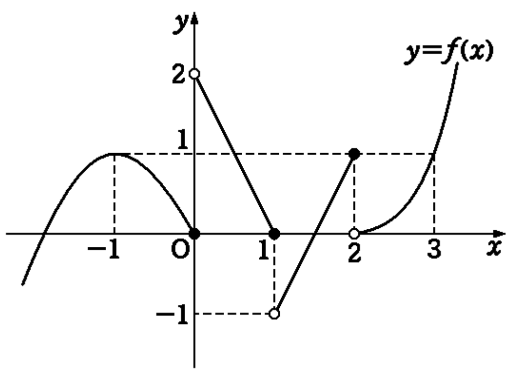
① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

5. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(x^2-t)\,dt$ 에 대하여 직선 $y=6x-k$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 양수 k의 값은?
[3점]

① $\frac{11}{2}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{15}{2}$
④ $\frac{17}{2}$　⑤ $\frac{19}{2}$

6. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

가.



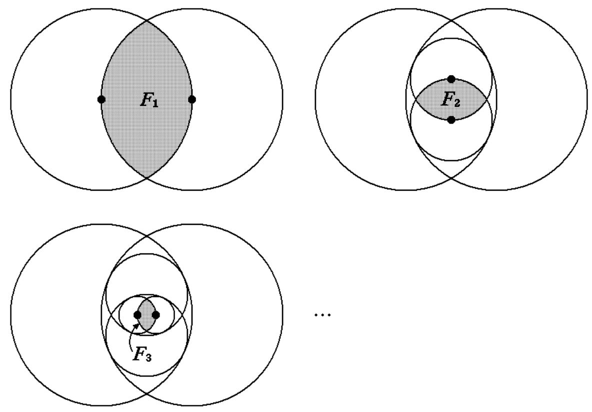
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자. F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자. F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?
[4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$　② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$
③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$　④ $2\pi(2+\sqrt{7})$
⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

8. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1,\ g(1)=2$
> (나) 모든 실수 x, y에 대하여
> $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ 이다.

이때 $\displaystyle\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}\,dx$의 값을 구하여라. [4점]

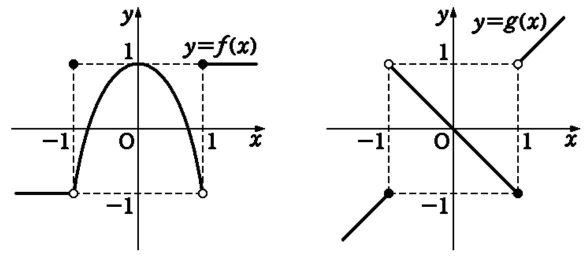
9. 자연수 n에 대하여

$$a_n=\sqrt{4n+1-2\sqrt{4n^2+2n}}\ ,\ b_n=\sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}$$

이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? [2점]

① $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　③ 1
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.

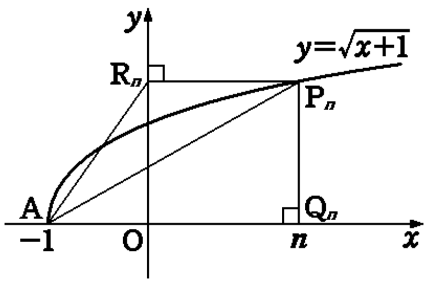


옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1} g(f(x))=1$
> ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(g(x))=-1$
> ㄷ. 함수 $y=f(g(x))$의 불연속점의 개수는 2개이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

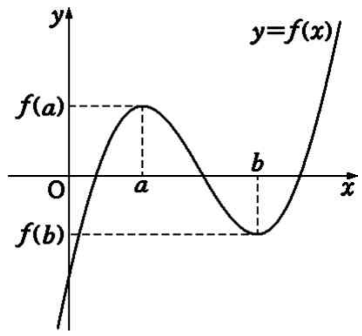
11. 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$과 자연수 n에 대하여 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $P_n(n,\ f(n))$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_n, y축에 내린 수선의 발을 R_n이라 하자.



점 $A(-1,\ 0)$에 대하여 사각형 $AQ_nP_nR_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 AQ_nP_n의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+T_n}{S_n-T_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지는 삼차함수 $f(x)$가 있다.$(0<a<b)$



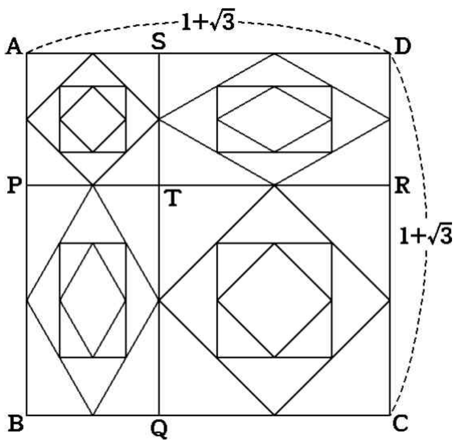
함수 $g(x)=e^{-x^2}f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $g'(0)>0$
ㄴ. $f'(a)+g'(a)>0$
ㄷ. $g(b)g'(b)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 그림과 같이 한 변의 길이가 $1+\sqrt{3}$인 정사각형 ABCD가 있다. 두 변 AB와 BC를 $1 : \sqrt{3}$으로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 변 CD와 DA를 $\sqrt{3} : 1$로 내분하는 점을 각각 R, S라 하자. 이때, 두 선분 PR, QS의 교점을 T라 하고, 네 사각형 APTS, PBQT, TQCR, STRD를 만든다.
먼저 사각형 APTS의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_1, 사각형 A_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_2, 사각형 A_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_3라 하자. 또, 사각형 PBQT의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_1, 사각형 B_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_2, 사각형 B_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_3라 하자. 또, 사각형 TQCR의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_1, 사각형 C_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_2, 사각형 C_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_3라 하자. 또, 사각형 STRD의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_1, 사각형 D_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_2, 사각형 D_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_3라 하자.

9.



이와 같은 과정을 계속하여 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n의 네 변 의 중점을 연결하여 만든 사각형을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n의 넓이를 각각 a_n, b_n, c_n, d_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=p+q\sqrt{3}$을 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7
⑤ 9

15. 좌표평면에서 직선 $y=mx+8$이 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

16. 함수 $f(x)=\frac{x^3}{9}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값은?
[3점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{33}{4}$

17. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(\beta, 0)$, $\mathrm{C}(\gamma, 0)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$에서 만난다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

[보기]

ㄱ. 방정식 $f(x)=k$ (k는 실수)가 서로 다른 세 실근을 가지면 함수 $f(x)$의 극댓값은 k이다.

ㄴ. $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)<0$, $f(\gamma)<0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

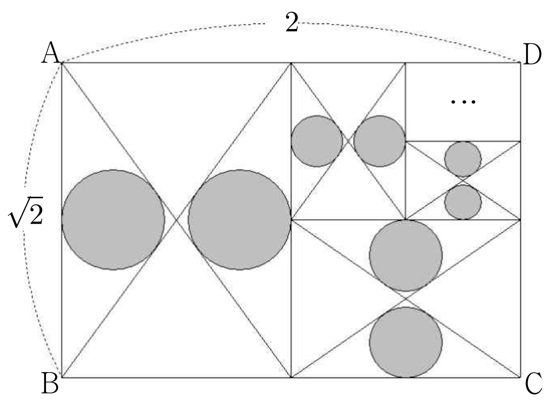
18. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$인 직사각형 ABCD에서 다음 [단계]와 같은 순서로 도형을 만들어 나간다.

[단계 1] 직사각형 ABCD의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

[단계 2] [단계 1]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.

[단계 3] [단계 2]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

⋮



이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 그려진 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(5-2\sqrt{6})$ ② $2\pi(3-\sqrt{6})$
③ $2\pi(5-\sqrt{6})$ ④ $4\pi(3-\sqrt{6})$
⑤ $4\pi(5-\sqrt{6})$

19. 다항식 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=\frac{11}{3}$
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-11$

$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

21. 폐구간 $[0, 1]$에서 $0 < f(x) < 1$를 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $f(a)=a$인 실수 a가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
>
> ㄴ. $f'(b)<1$인 실수 b가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
>
> ㄷ. 개구간 $(0, 1)$의 모든 x에 대하여 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt < x$ 이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 다음은 서로 다른 두 점에서 만나는 두 곡선 $y=x^2$ 과 $y=ax^2+bx+c$에 대하여 $d=b^2-4c(a-1)$이라 하고, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때

$$S=\frac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$$

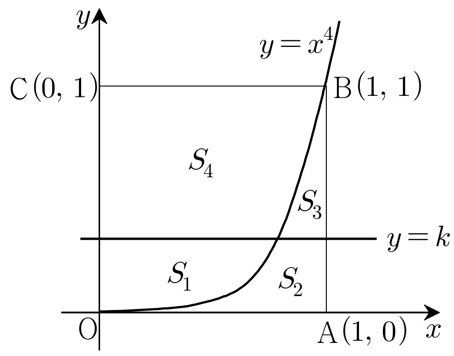
임을 증명하는 과정이다. (단, $a\neq 0$이고 a, b, c는 실수)

> [증명]
>
> 두 곡선 $y=x^2$과 $y=ax^2+bx+c$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $(a-1)x^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$를 갖는다.
>
> 따라서 $a\neq 1$, $d>0$이고
>
> $\beta-\alpha=\boxed{\text{(가)}}$ ………㉠
>
> 그런데 $\displaystyle\int_\alpha^\beta\{(a-1)x^2+bx+c\}\,dx$
>
> $=(\boxed{\text{(나)}})\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$
>
> $=\boxed{\text{(다)}}$ ………㉡
>
> 따라서 ㉠과 ㉡에 의해 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는
>
> $S=\left|\boxed{\text{(다)}}\right|=\dfrac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4점]

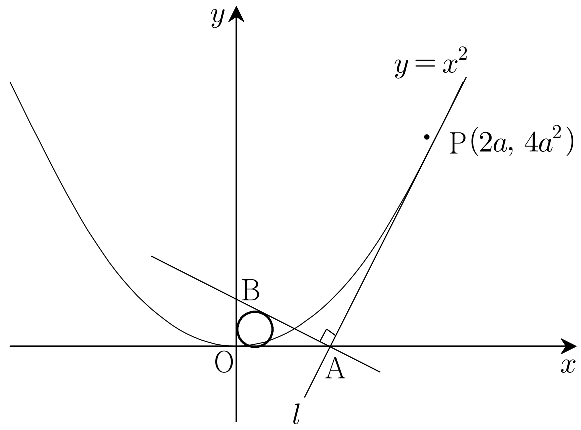
	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{\sqrt{d}}{\lvert a-1\rvert}$	$1-a$	$\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$
②	$\frac{\sqrt{d}}{\lvert a-1\rvert}$	$a-1$	$\frac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$
③	$\frac{\sqrt{d}}{a-1}$	$1-a$	$\frac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$
④	$\frac{\sqrt{d}}{\lvert a-1\rvert}$	$a-1$	$\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$
⑤	$\frac{\sqrt{d}}{a-1}$	$a-1$	$\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$

23. 좌표평면 위에 네 점 O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1) 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y=x^4$과 직선 $y=k$ $(0<k<1)$에 의해 정사각형 OABC를 네 영역 으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값은? [4점]



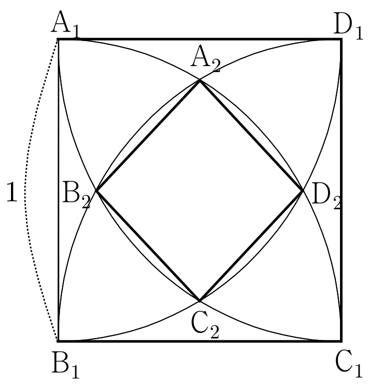
① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

24. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P$(2a, 4a^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty} r(a)$의 값은? (단, $a>0$, O는 원점이다.) [4점]

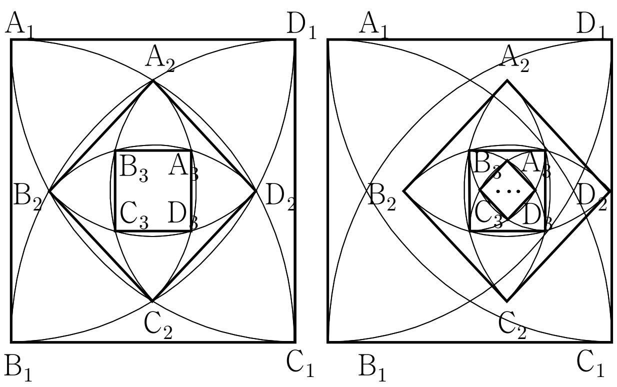


① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

25. [그림1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자. 또 [그림2]와 같이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_2B_2}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_nB_n}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1} 이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



[그림1]



[그림2]

① $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

26. 다음 세 조건을 모두 만족시키는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

(가) $-1 \leq x \leq 1$일 때, $f(x)=3x^2$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$

이때, $0<x<10$에서 함수 $y=[f(x)]$의 불연속점의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

27. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-2x^3}{3x^2}=1$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=-12$ 를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [2점]

① -7 ② -5 ③ -3
④ 1 ⑤ 2

28. 함수 $f(x)=\lim_{n \to \infty} \frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}$에 대한 설명 중 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x=-1$에서 연속이다.
ㄴ. $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.
ㄷ. $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

29. 두 함수 $f(x)=2x^3-3x^2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 방정식 $(g \circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

30. 정적분
$\int_2^6 \frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}dx+\int_6^2 \frac{4(y^2+2y+4)}{y+2}dy$의 값을 구하시오. [3점]

31. 부등식 $[x]^3-6[x]^2+11[x]-6 \geqq 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 집합은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [2점]

① $\{x \mid x \geqq 1\}$ ② $\{x \mid x \geqq 3\}$
③ $\{x \mid 1 \leqq x \leqq 3\}$ ④ $\{x \mid 1 \leqq x < 4\}$
⑤ $\{x \mid 1 \leqq x < 2 \text{ 또는 } x \geqq 3\}$

32. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f'(1)=2$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여
$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)-3$

이 때, $f(3)$의 값은? [3점]

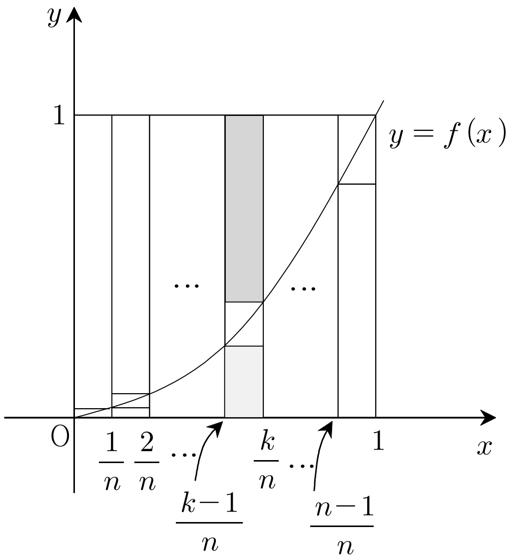
① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

33. $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. 곡선 $y=x^2$과 x축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $14\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [3점]

① $5\sqrt[3]{5}$ ② $4\sqrt[3]{4}$ ③ $3\sqrt[3]{3}$
④ 4 ⑤ 5

34. 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 A_n, B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}, \quad B_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{1-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$



이 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보기>

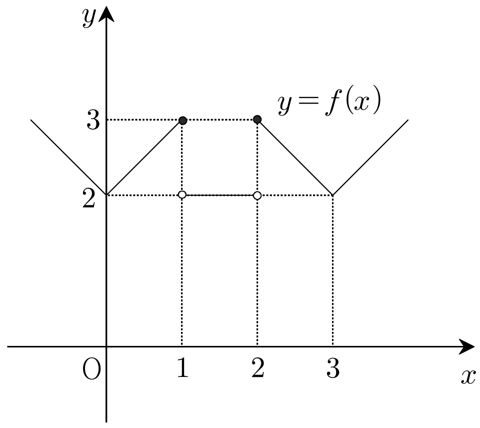
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}B_n=\frac{3}{4}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(A_n-B_n)=-\frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 1-0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 2+0}(f\circ f)(x)$

ㄷ. 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

36. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x$가 있다. 임의의 양의 실수 a에 대하여 $f(a)\geq f(b)$를 만족시키는 음의 실수 b의 최대값은? [3점]

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

37. 충분히 크고 비어 있는 물탱크에 다음과 같은 방법으로 물을 넣고 빼는 시행을 한다.

(가) 물을 넣기 시작한 지 t분 $(0 \leq t \leq 20)$이 지난 순간, 물탱크에 넣는 물의 부피의 변화율은 $(t+8)$(L/분)이다. (나) 물의 양이 130 L가 되는 순간부터는 물탱크의 밑바닥에 있는 출구를 열어 물을 뺀다. 이 때, 빠져 나가는 물의 부피의 변화율은 26(L/분)으로 일정하다. 단, 물탱크의 출구를 열어도 (가)의 방법으로 계속 물을 넣는다.

물탱크의 물의 양이 두 번째로 100L가 될 때까지 걸리는 시간은? [4점]

① 10분 ② 12분 ③ 14분
④ 16분 ⑤ 18분

38. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_n, T_n을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $a_n + S_n = 2$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$) ㄴ. $T_n = a_{n-1}$ (단, $n = 2, 3, 4, \cdots$) ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. $x \neq 2$인 모든 실수 x에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{x\to2}\{2f(x)+g(x)\}=1$ (나) $\lim_{x\to2}g(x)=\infty$

이 때, $\lim_{x\to2}\frac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하시오. [3점]

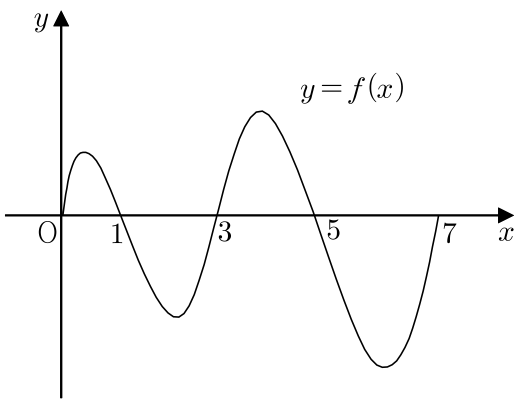
40. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2)+f(x)+12}{x-1} = 12$$

를 만족할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 y 절편은? [3점]

① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

41. 함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 하자. [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid 0 \le x \le 7\}$ 이다.) [3점]



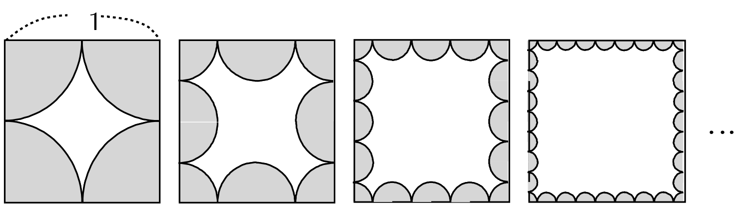
[보기]
ㄱ. $g(x)$는 $x=5$에서 극대값을 갖는다.
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 최소값을 갖는다.
ㄷ. $g(5)=g(1)-\left|\int_1^3 f(t)dt\right|+\left|\int_3^5 f(t)dt\right|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

42. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(a, b)$ 가 있다. 선분AC 의 중점을 P_1 이라 하고, 선분 BP_1 의 중점을 Q_1 이라 하자. 또, 선분 AQ_1 의 중점을 P_2 라 하고, 선분 BP_2 의 중점을 Q_2 라 하자. 이와 같이 모든 자연수 n에 대하여 선분 BP_n의 중점을 Q_n 이라 하고, 선분AQ_n 의 중점을P_{n+1} 이라 하자. n 이 한없이 커질 때, 점P_n 은 어떤 점에 한없이 가까워지는가? [4점]

① $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ② $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

43. 한 변의 길이가 1 인 정사각형을 R라 하자. R의 각 변을 2등분 한 후 [그림1]과 같이 각 꼭지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 사분원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_1 이라 하자. R의 각 변을 4 등분 한 후 [그림2]와 같이 각 꼭지점 및 각 변의 이등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_2 라 하자. R의 각 변을 8 등분 한 후 [그림3]과 같이 각 꼭지점 및 각 변의 사등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.
이와 같은 방법으로 S_4, S_5, S_6, $\cdots$ 을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림1] [그림2] [그림3] [그림4]

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ $\frac{7}{9}\pi$
④ $\frac{7}{8}\pi$ ⑤ $\frac{8}{9}\pi$

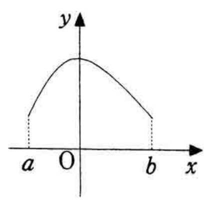
44. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) 곡선 $y=f(x)+1$ 은 $x=1$ 에서 x 축에 접한다.
(나) 곡선 $y=f(x)-1$ 은 $x=-1$ 에서 x 축에 접한다.

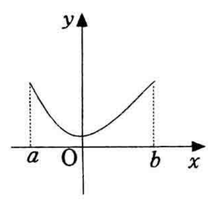
이 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

45. 폐구간$[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$가 $a < x_1 < x_2 < b$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} > \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$ 를 만족할 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은? [2점]

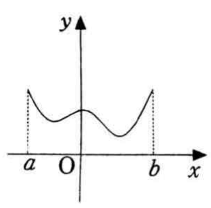
①



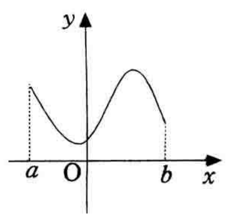
②



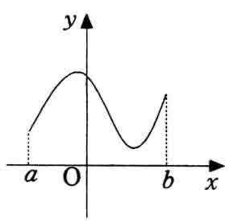
③



④



⑤



46. 이차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 등식

$$\int_0^2 f(x)\,dx = af(0)+bf(1)+cf(2)$$

이 항상 성립하도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은? [3점]

① 4 ② 8 ③ $\frac{4}{27}$
④ $\frac{8}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

47. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 두 함수 $g(x), h(x)$ 를 $g(x)=f'(x)$, $h(x)=g'(x)$ 로 정의하자.
$g(0)=h(0)=0$ 이고 $f(0)h'(0)<0$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근에 대한 설명으로 옳은 것은? [3점]

① 서로 다른 세 개의 양의 실근을 갖는다.
② 서로 다른 세 개의 음의 실근을 갖는다.
③ 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖는다.
④ 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖는다.
⑤ 한 개의 양의 실근을 갖는다.

48. 자연수 n 과 실수 x 에 대하여 함수 $F_n(x)$ 가

$$F_n(x)=\int \frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$F_n(1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-5}+\dots+\frac{1}{2}-1$$

와 같이 정의될 때, $F_n(0)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{n(n-1)}{2}$
② $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
③ $\frac{(n-1)(n-2)}{n+1}$
④ 0
⑤ 1

49. 동일한 직선도로 위를 같은 방향으로 달리는 두 자동차A 와 B 가 있다. 자동차 A 가 매시 $72\,km$ 의 속력으로 달리고 있던 중 P 지점에 이르렀을 때, P 지점에서 $100\,m$ 앞에 정지하고 있던 자동차 B 를 발견하고 제동장치를 작동하여 $-5\,m/초^2$ 의 가속도로 운행하였다. A 가 제동장치를 작동한지 4 초가 되는 순간에 정지하고 있던 B 는 $6\,m/초^2$ 의 가속도로 출발하였고, 동시에 A 는 $10\,m/초^2$ 의 가속도로 계속하여 운행하였다. 이 때, P 지점에서 A 가 B 를 추월하는 지점까지의 거리는 몇 m 인지를 구하시오. [4점]

50. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3-2x^2+3x-4}=1\ ,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=4$$

이 성립하고, 극한 $\lim_{x\to2}\frac{13f(x)}{x^2-3x+2}$ 이 α 로 수렴할 때, 상수 α 의 값을 구하시오. [3점]

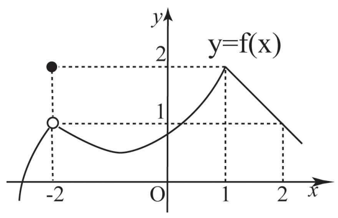
51. $\lim_{x\to2005}\frac{2007(2005-x)}{\sqrt{2006-x}-\sqrt{x-2004}}$ 의 값은 ? [2점]

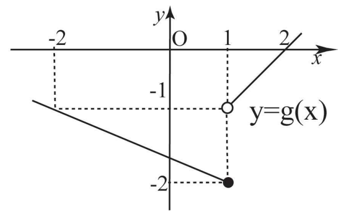
① 2004 ② 2005 ③ 2006
④ 2007 ⑤ 2008

52. 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)=x^2g(x)$ 이고 $g(1)=3$, $g'(1)=5$ 일 때, 미분계수 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11
⑤ 12

53. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은 ? [3점]





ㄱ. $\lim_{x\to-2}\{f(x)+5g(x)\}=-4$

ㄴ. $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=-4$

ㄷ. $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

54. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은 ? (단, a, b는 상수) [3점]

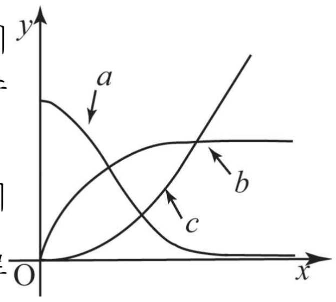
ㄱ. $a\le x\le b$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x)\le g(x)$ 이면
$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$ 이다.

ㄴ. $a\le x\le b$ 인 모든 x 에 대하여
$\int_a^b|f(x)|\,dx\le\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ 이다.

ㄷ. 임의의 실수 x 에 대하여 $h(-x)=h(x)$ 이고
$\int_0^a h(x)dx=\omega$ 이면 $\int_{-a}^a(x-1)h(x)dx=-2\omega$

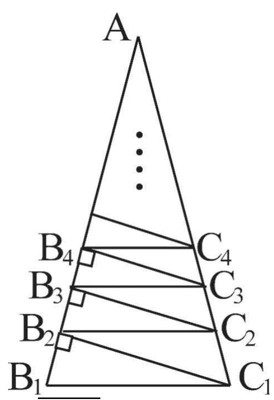
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

55. 오른쪽 그림은 실수 전체의 집합에서 정의된 세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $\int_0^x f(t)dt$의 그래프의 일부이다. 각 그래프와 함수가 바르게 대응된 것은? [3점]



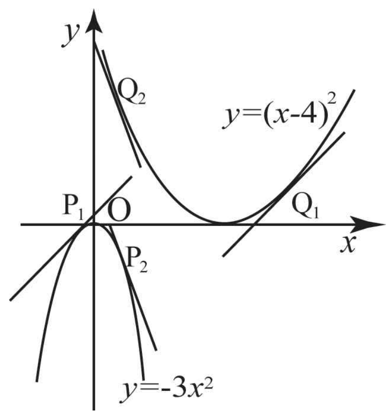
	a	b	c
①	$f(x)$	$f'(x)$	$\int_0^x f(t)dt$
②	$f'(x)$	$f(x)$	$\int_0^x f(t)dt$
③	$f'(x)$	$\int_0^x f(t)dt$	$f(x)$
④	$\int_0^x f(t)dt$	$f'(x)$	$f(x)$
⑤	$\int_0^x f(t)dt$	$f(x)$	$f'(x)$

56. $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=10$ 인 이등변삼각형 AB_1C_1이 있다. 오른쪽 그림과 같이 점 C_1 에서 변 AB_1 에 내린 수선의 발을 B_2, 점 B_2 에서 변 B_1C_1 과 평행한 선분을 그어 변 AC_1과 만나는 점을 C_2라 한다. 이와 같은 방법으로 변 AB_1 과 변 AC_1위에 점을 잡아서 각 점을 $B_3, C_3, B_4, C_4, \cdots$ 라 하자. $\overline{B_1B_2}$의 길이가 $\overline{B_1C_1}$의 길이의 $\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{B_kC_k}$의 값은? [3점]



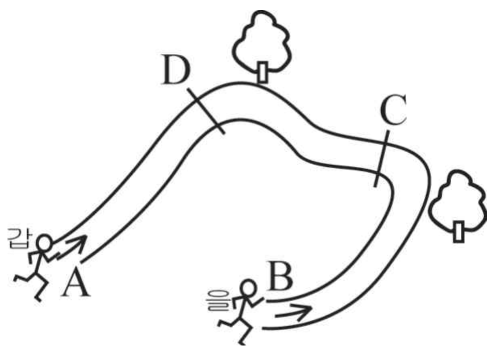
① 40 ② 35 ③ 30
④ 25 ⑤ 20

57. 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y=-3x^2$ 위에 서로 다른 두 점 P_1, P_2 가 있고, 포물선 $y=(x-4)^2$위에 두 점 Q_1, Q_2 가 있다. 점 P_1 에서의 접선과 점 Q_1 에서의 접선이 서로 평행하고, 점 P_2 에서의 접선과 점 Q_2 에서의 접선이 서로 평행할 때, 직선 P_1Q_1 과 직선 P_2Q_2 의 교점의 좌표는? [3점]



① (2,1) ② (2,0) ③ (1,1)
④ (1,−1) ⑤ (1,0)

58. 7.5 km 떨어진 두 지점 A, B 를 잇는 산책로가 있다. 갑은 A 지점에서, 을은 B 지점에서 동시에 출발하여 각각 A, B 사이를 왕복할 때 갑이 먼저 도착하였다. 한편, 갑과 을이 각각 왕복하는 동안에 C 지점에서 처음으로 만났고, 그로부터 50 분 후에 D 지점에서 두 번째로 만났다. C 지점과 D 지점 사이의 거리가 3 km 일 때, 갑과 을의 속력의 비는? (단, 갑과 을은 각각 일정한 속력으로 움직이고, 을은 반환점 A 를 지난 후 두 번째로 만났다.) [4점]



① 3 : 2 ② 4 : 3 ③ 3 : 4
④ 4 : 5 ⑤ 5 : 3

59. 일직선 운동을 하는 두 물체 P, Q 의 t 초 후의 속도를 각각 v_{P} , v_{Q} 라 하자. 물체 P 는 물체 Q 보다 $54\,m$ 앞에서 출발하여 $v_{\mathrm{P}}=3t^2$ (m/초)의 속도로 움직이고 물체 Q 는 일정한 속도 v_{Q}(m/초)로 움직인다. 두 물체가 만나게 되는 v_{Q} 의 값 중에서 최소인 것을 a 라 하자. $v_{\mathrm{Q}}=a$ 일 때, 두 물체는 Q 가 처음에 있었던 위치보다 얼마만큼 떨어진 위치에서 만나게 되는가? [4점]

① $54m$ ② $61m$ ③ $73m$
④ $78m$ ⑤ $81m$

60. 실수 전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(1)=25$
Ⅱ. $f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+1}f(t)dt-\dfrac{1}{2}\int_x^{x-1}f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt$
Ⅲ. 임의의 실수 x, y에 대하여
$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$

이때, 미분계수 $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

61. $f(x)$의 부정적분 $F(x)$와 $g(x)$의 부정적분 $G(x)$가 다음 관계식을 만족한다.

$$f(x)=\frac{G(x)+g(x)}{2},\ g(x)=\frac{F(x)+f(x)}{2}$$

$f(0)=0$, $g(0)=2$ 일 때, $f(1)+g(1)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) [3점]

① -2 ② 2 ③ $1+e$
④ $2+e$ ⑤ $2e$

62. 다음과 같이 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2} & (x<1)\\ -x^2+4x & (x\geq 1)\end{cases}$$

가 있다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

63. 다음은 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여
$F(x)=\int_a^x f(t)dt$의 어떤 성질을 증명하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

[증 명]
(ⅰ) $h>0$일 때,
x 와 $x+h$가 개구간 $(a,\ b)$ 안에 있다면
$F(x+h)-F(x)=$ $\boxed{\text{(가)}}$이고
$f(x)$는 정의된 구간에서 $\boxed{\text{(나)}}$이므로
적당한 상수 $m, M\ (m \leq M)$이 존재하여
$mh \leq$ $\boxed{\text{(가)}}$ $\leq Mh$이다.
양변을 h로 나누고 $h \to +0$이면 m과 M이 같아지므로
$$\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$ 이다.
(ⅱ) $h<0$일 때
(ⅰ)과 동일한 방법으로
$$\lim_{h\to-0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$ 임을 알 수 있다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

① $\int_x^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)=f(x)$

② $\int_x^{x+h} f(t)dt$, 미분가능한 함수, $F'(x)=f(x)$

③ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)=f(x)$

④ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)$는 $[a, b]$에서 연속

⑤ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 미분가능한 함수, $F'(x)$는 $[a, b]$에서 연속

64. 일반항이 $a_n=n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)(n \geq 1)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음은 $\lim_{n\to\infty}a_n$이 존재하도록 하는 실수 a의 값과 이 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하는 과정이다. <풀이>에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

$$a_n=n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a}{\frac{1}{n}}$$
이므로 이 수열이 수렴하려면
$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=$ $\boxed{\text{(가)}}$이다.
그러므로 $a=$ $\boxed{\text{(나)}}$이다.
따라서, $\lim_{n\to\infty}a_n=$ $\boxed{\text{(다)}}$이다.

① 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$　　② 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$

③ 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$　　④ 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{16}$

⑤ 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{16}$

-선생님 연락-

HP 010 9645 5800

카톡 아이디 Gojw

이메일 gjwmtr@gmail.com

1) ③
2) 250
3) ⑤
4) ④
5) ⑤
6) ③
7) ①
8) 18
9) ⑤
10) ⑤

11) ③
12) ①
13) ⑤
14) ②
15) ③
16) ①
17) ①
18) ①
19) 11
20) ②

21) ⑤
22) ④
23) ③
24) ③
25) ①
26) 25
27) ①
28) ⑤
29) ③
30) 288

31) ①
32) ③
33) ④
34) ②
35) ⑤
36) ⑤
37) ④
38) ⑤
39) 21
40) ②

41) ③
42) ④
43) ①
44) 26
45) ①
46) ④
47) ⑤
48) ④
49) 190m
50) 65

51) ④
52) ④
53) ①
54) ④
55) ②
56) ①
57) ⑤
58) ①
59) 81
60) 50

61) ⑤
62) ⑤
63) ①
64) ⑤