내적의 정의는 무엇이었죠?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 였습니다.

자, 그렇다면 왜 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$일까요?

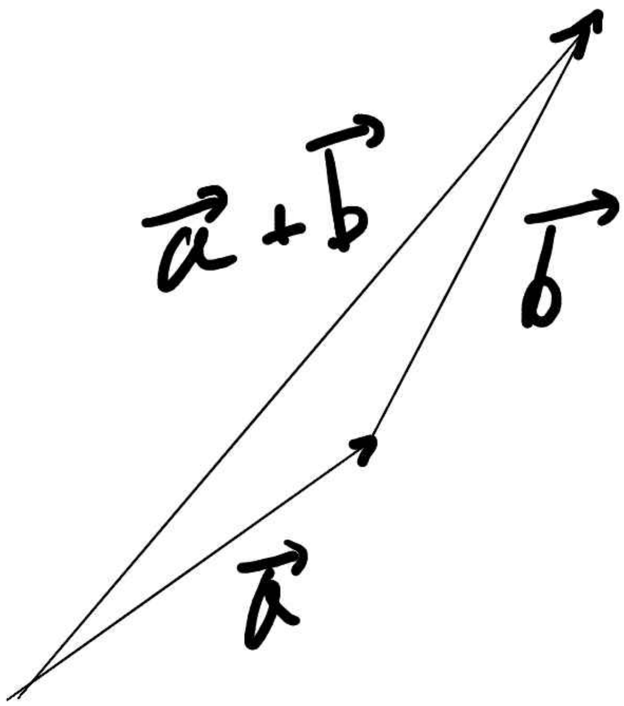
$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$는

벡터의 내적의 분배법칙에 따라 옳습니다. 내적 배운 후 분배법칙은 바로 배우죠.

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b})$인 것만 증명하면 되겠죠?

우리는 벡터의 합을 어떻게 구했나요?

이런 식으로 구했죠!



$\vec{a}+\vec{b}$는 벡터 하나입니다. 시점과 종점이 하나씩 있는 한 벡터라구요.

그렇다면, $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta$로 나타낼 수 있겠죠.

같은 벡터이니까, 각도는 0도입니다. 즉

$$(\vec{a}+\vec{b}) \bullet (\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}|\,|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}+\vec{b}|^2$$ 가 되네요.

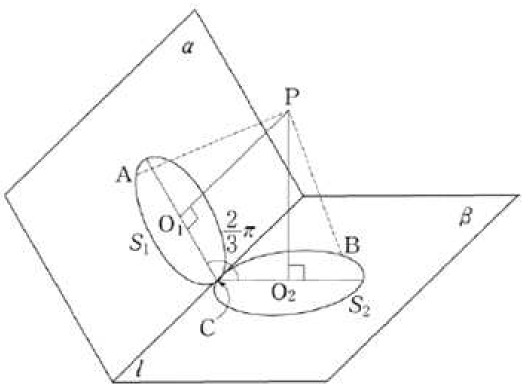
그렇기에 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \bullet \vec{b})$가 성립합니다.

같은 벡터끼리 내적하면, 크기의 제곱이 되는 것을 거꾸로 생각한거죠.

이제 다음 문제에 대한 해법을 생각해봅시다.

두 평면 α, β의 교선을 l 이라 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1 과 평면 β 위에 있는 원 S_2 는 반지름의 길이가 모두 2 이다. 그림과 같이 원 S_1 과 원 S_2 는 점 C에서 직선 l 과 접한다. S_1 의 중심 O_1 을 지나고 평면 α 에 수직인 직선과 S_2 의 중심 O_2 를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 하자.

$\angle O_1CO_2 = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A와 S_2 위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값을 구하시오.



원뿔의 모선이 PA와 PB입니다. 즉, PA는 A가 어느 위치던지 길이가 일정하겠네요.

PB또한 B가 어느 위치던 길이가 일정합니다.

(이것은 PO_1 은 높이고 O_1A는 길이가 일정하기에, 피타고라스 정리로 일정하다 해도됩니다.)

우리는 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$를 하나의 직선으로 더하기 힘듭니다. A와 B는 변해요.

그렇다면, 한번 저것을 제곱해볼까요? 나중에 루트 씌우면 되잖아요.

$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|^2=\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2+2\,\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 였죠!

PA와 PB의 길이는 일정하기에 우리는 $2\,\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$의 크기만 생각해주면 됩니다.

이 내적의 크기가 최대면, $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$이 최대일거고, 최소면 값이 최소일겁니다.

$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|\cos\theta$ 입니다.

내적값은 각이 작을 때 최대, 각이 180도에 가까울 때 최소입니다.

그렇다면 우리는 고민해줍니다.

어떨 때 각이 최대일까? 그리고 어떨 때 각이 최소일까?

다시 정리해보자면,

$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|^2=\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2+2\,\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$

벡터의 합의 크기는, PA의 크기, PB의 크기와 둘의 내적 값의 크기에 따라 달라집니다.

그렇다면, 먼저 어떤 값이 일정한지, 어떤 값이 변하는지를 파악해야합니다.

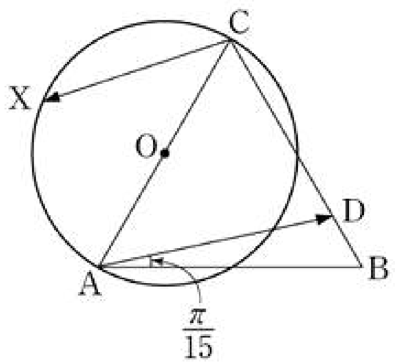
그 후에는 값이 어떻게 변하는지를 체크하면 쉽게 평면벡터 문제를 풀 수 있습니다.

저기에서는 내적값만 변하고, 내적값에서도 각의 크기만 변하네요!

각의 범위만 생각해주면 쉽게 풀 수 있을 것 같아요.

이렇게 일정한 값이 많으면 참 구하기 쉬울텐데요..!

22. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



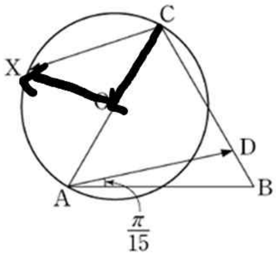
이런 문제는 어떻게 풀까요?

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX} = |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{CX}|\cos\theta$ 입니다.

AD는 정해져있습니다. CX가 달라지네요. X가 원위를 돌면서 각의 크기도 달라집니다.

문제가 생겼어요. CX의 크기도 바뀌고, 각도 바뀌어서 알기가 힘들어요.

그러면 어떻게 해결해야 할까요?



이렇게 $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OX}$ 로 분리하면 어떨까요?

왜 원의 중심을 기준으로 벡터를 분리해줘야 할까요?

$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX}$

$= |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{CO}|\cos\theta + |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{OX}|\cos\theta'$

이제 살펴봅시다. AD와 CO의 크기는 정해져있습니다. 각도 정해져있네요.

AD와 OX가 이루는 각은 계속 변하네요.

다만 OX는 원의 반지름이기에 크기는 일정합니다.

각 또한 X가 원위를 도는 임의의 점이므로 0부터 360도까지 임의의 각을 가질겁니다.

최솟값은 언제 나올까요? 180도일 때겠죠!

내적의 최대 최소를 생각할 때, 원이 나온다면 원의 중심으로 벡터를 분해해줍니다.

왜그럴까요?

최대한 일정한 값을 많게 하려는 작업입니다.

분해하기 전, 크기와 이루는 각이 일정하지 않았죠.

하지만 분해한 후에는 크기는 원의 반지름이기에 일정해지네요!